Helsingin Yliopisto | Loppukoe
Matematiikan laitos
Lyhteet ja skeemat | 21.3.2005

Ratkaistava seuraavista tehtävistä 5 (viisi):

1. Olkoon $\varphi\colon A \longrightarrow B$ rengashomomorfismi ja $f\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ tätä vastaava affiinien skeemojen välinen morfismi. Osoitettava, että

$$\overline{\operatorname{Im} f} = V(\operatorname{Ker} \varphi).$$

2. Olkoon X skeema ja $x \in X$. Osoitettava, että on olemassa luonnollinen morfismi $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$. Mikä on tämän (joukko-opillinen) kuva?

3. Olkoon $f\colon X \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ skeemojen morfismi, missä A on rengas. Olkoon $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-moduli. Osoitettava, että $\mathcal{F}$ on globaalien sektioiden virittämä, jos ja vain jos luonnollinen morfismi $f^*f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ on epimorfismi.

4. Olkoon $\mathcal{F}$ kvasikoherentti lyhde Noetherin skeemalla X. Osoitettava, että kaikilla avoimilla affiineilla joukoilla $V \subset U \subset X$ pätee

$$\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(V).$$

5. Olkoon $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$ porrastettu rengas ja e positiivinen kokonaisluku. Osoitettava, että on olemassa luonnollinen isomorfismi $\operatorname{Proj} S \cong \operatorname{Proj} S^{(e)}$, missä

$$S^{(e)} = \bigoplus_{n\geq 0} S_{ne}$$

on renkaan S e:s Veronesen alirengas.

6. Olkoon V k-vektoriavaruus, missä k on kunta. Osoitettava, että jos kunta K on kunnan k laajennus, niin skeeman $\mathbb{P}(V^*)$, missä V^* on V:n duaali, K-pisteet vastaavat bijektiivisesti K-vektoriavaruuden $V_K := V \otimes_k K$ suoria.

7. Osoitettava, että jokainen vahva kvasiprojektiivinen morfismi on projektiivinen.

8. Olkoon $\mathcal{L}$ runsas lyhde kokonaisella projektiivisella k-skeemalla X, missä k on algebrallisesti suljettu kunta. Osoitettava, että jos X ei ole piste, niin $\Gamma(X, \mathcal{L}^n) = 0$ kaikilla $n < 0$.