Institutionen för matematik och statistik
Logik I
Kursförhör 2
9.5.2008

1. Låt lexikonet (alfabetet) $L = \{R_0\}$. Vi definierar en L-modell $\mathcal{M}$ genom att låta
$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
och $R_0^{\mathcal{M}} = \{(n, m) \in \mathbf{N}^2 : m = 3n\}$. Visa utgående direkt från Tarskis sanningsdefinition att
$$\mathcal{M} \models \forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1).$$

2. Konstruera ett semantiskt träd med en slutlig öppen gren, för satsen
$$\exists x_0 \neg \forall x_1 \neg ((P_0(x_0) \to P_1(x_1)) \wedge (P_1(x_1) \to P_0(x_0))).$$
Konstruera med hjälp av grenen en modell som satisfierar satsen. Kan en modell satisfiera satsen även om dess domän (universum) har färre element än domänen hos modellen som grenen ger?

3. Konstruera en härledning (natrulig deduktion) som visar att
$$\{\neg \exists x_0 \neg P_0(x_0)\} \vdash P_0(F_0^1(c_0)).$$
Tips: $\{\neg \exists x_0 \neg P_0(x_0)\} \vdash \forall x_0 P_0(x_0)$ och $\{\forall x_0 P_0(x_0)\} \vdash P_0(F_0^1(c_0))$.

4. Korollariet från kursmaterialet räcker inte till för precis alla resultat om definerbarhet. En av nedanstående tre egenskaper hos bollmodeller är inte definierbar. Visa att den ifrågavarande egenskapen inte är definierbar med hjälp av följande påstående: Om $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ är bollmodeller med lika många svarta bollar var, och om både $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ innehåller minst n vita bollar, så är $\mathcal{M}$ och $\mathcal{N}$ n-ekvivalenta.
   (a) Om det finns 99 svarta bollar, så finns det minst fem gånger så många vita som svarta.
   (b) Om det finns fem svarta bollar, så är antalet vita bollar jämnt delbart med fem.
   (c) Om det finns fem svarta bollar, så finns det inte lika många vita som svarta.