Institutionen för matematik och statistik
Logik I
Kursförhör 2
15.12.2006

1. Låt L vara ett lexikon och låt A vara en L-formel. Visa att $\exists x_0 \forall x_1 A \Rightarrow \forall x_1 \exists x_0 A$ utgående direkt från Tarskis sanningsdefinition.

2. Visa att formeln $\forall x_0 A \leftrightarrow \neg \exists x_0 \neg A$ är valid genom att konstruera ett semantiskt bevis. Observera att ett fullständigt svar innehåller enkla motiveringar i form av kommentarer eller korta förklaringar.

3. Visa att $\{\exists x_0 (P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))\} \vdash \exists x_0 P_0(x_0) \wedge \exists x_1 P_1(x_1)$ genom att konstruera en härledning (i systemet naturlig deduktion såsom det framställts på kursen).

4. Lös *en av följande* två uppgifter. Om du trots allt gör ett försök på båda, ge då en preferens; vilken skall bedömas i första hand?

   (a) Låt X vara en mängd och $\mathscr{P}(X)$ potensmängden $\{A : A \subseteq X\}$. Visa att det inte existerar en surjektiv funktion $f : X \to \mathscr{P}(X)$ (en version av Cantors diagonalargument).

   (b) Låt $L^* = \{P_0\} \cup \{c_i : i \in \mathbf{N}\}$ och låt

   $$T = \{\forall x_0 P_0(x_0), \exists x_1 P_0(x_1) \to P_0(c_9)\}.$$

   Antag att T^* är en sådan maximalt konsistent L^*-teori att $T \subseteq T^*$. Hör satsen $\neg P_0(c_9)$ till teorin T^* eller inte? Motivera ditt svar med ett bevis!

Institutionen för matematik och statistik
Logik I
Kursförhör 2
18.12.2006

1. Konstruera ett slutligt semantiskt träd för satsen

$$\neg\forall x_0\forall x_1(R_0(x_0,x_1) \to (P_0(x_0) \to P_1(x_1)))$$

och konstruera med hjälp av trädet en syntaktisk modell som satifierar satsen.

2. Visa att formeln $\forall x_0\exists x_1 R_0(x_0,x_1) \leftrightarrow \exists x_1\forall x_0 R_0(x_0,x_1)$ inte är valid utgående direkt från Tarskis sanningsdefinition.

3. Visa att formeln $\exists x_i A \to \neg\forall x_i \neg A$ är valid genom att konstruera en härledning (i systemet naturlig deduktion såsom det framställts på kursen).

4. Lös *en av följande* två uppgifter. Om du trots allt gör ett försök på båda, ge då en preferens; vilken skall bedömas i första hand?

   (a) Låt X vara en mängd och $\mathcal{P}(X)$ potensmängden $\{A : A \subseteq X\}$. Visa att det inte existerar en surjektiv funktion $f : X \to \mathcal{P}(X)$ (en version av Cantors diagonalargument).

   (b) Låt $L^* = \{P_0\} \cup \{c_i : i \in \mathbf{N}\}$ och låt

   $$T = \{\forall x_0 P_0(x_0), \exists x_1 P_0(x_1) \to P_0(c_9)\}.$$

   Antag att T^* är en sådan maximalt konsistent L^*-teori att $T \subseteq T^*$. Hör satsen $\neg P_0(c_9)$ till teorin T^* eller inte? Motivera ditt svar med ett bevis!