Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Logiikka I

Loppukoe/Huuskonen

9.8.2007

1. Tutki totuustaulun avulla, onko propositiolause $(p_0 \to p_1) \to p_1$ propositiolauseen p_0 kanssa loogisesti ekvivalentti.

2. Osoita semanttisen puun avulla, että propositiolauseet $(p_0 \to p_1) \to p_0$ ja p_0 ovat loogisesti ekvivalentit.

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle:

$$\{\forall x_1(\neg P_0(x_1) \to P_0(x_1))\} \vdash P_0(c_0)$$

(Vihje: Tilapäisestä oletuksesta $\neg P_0(c_0)$ voi johtaa ristiriidan.)

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta.

$$\{\forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))\} \nvdash \forall x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)$$

Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

5. Osoita, että seuraava pallomallien ominaisuus ei ole määriteltävä predikaattilogiikassa:

Mallin alkioiden lukumäärä on jaollinen luvulla 13.

(Oppikirjassa todistettuja väitteitä saa käyttää vapaasti hyväksi.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Erilliskoe
24.1.2008

1. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\neg A \vee B\} \vdash A \rightarrow B.$$

2. Konstruoi malli, jonka aakkosto on $\{c_0, R_0\}$ ja joka toteuttaa lauseet

$$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$$

ja

$$\forall x_0 \neg R_0(x_0, c_0).$$

Tarkkaa todistusta ei vaadita, mutta malli on esitettävä tarkalla määritelmällä.

3. Olkoon $\mathcal{M}$ malli, jolle $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{0, 1, 2\}$ ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(0, 1), (1, 2), (2. 1)\}$. Onko lause $\forall x_0 \exists x_1 (R_0(x_1, x_0))$ tosi mallissa $\mathcal{M}$? Perustele vastauksesi suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen.

4. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{A \rightarrow \neg \exists x_0 B\} \vdash A \rightarrow \forall x_0 \neg B.$$

kun x_0 ei esiinny vapaana kaavassa A.

5. Onko seuraava pallomallien ominaisuus määriteltävä: Jos mustia palloja on korkeintaan neljä, niin mustia palloja on parillinen määrä. Perustele vastauksesi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiika I
Erilliskoe
4.3.2008

Ratkaise viisi seuraavasta kuudesta tehtävästä.

1. Esitä propositiolauseen A kanssa ekvivalentti propositiolause, joka on disjunktiivisessa normaalimuodossa, kun

   (a) A on $\neg(p_0 \leftrightarrow p_1)$.

   (b) A on $\neg(p_0 \vee p_1) \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5$.

   (c) A on tautologia.

   Vihje: kohdissa (b) ja (c) ei kannata tehdä totuustaulua (ainakaan koko lauseelle A), vaan ratkaisu löytyy muuta kautta helpommin.

2. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{(A \rightarrow C, \neg B \vee C\} \vdash (A \vee B) \rightarrow C.$$

3. Olkoot A, B ja C propositiolauseita. Osoita, että jos $A \Rightarrow B$ ja $\{B\} \vdash C$, niin $\{A\} \vdash C$.

4. Anna semanttinen todistus lauseelle

$$\exists x_0 \neg \exists x_1 R_o(x_0, x_1) \rightarrow \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1).$$

5. Kumpi seuraavista pallomallien ominaisuuksista on määriteltävä?

   (a) Mustia palloja on enemmän kuin valkoisia ja valkoisia on korkeintaan viisi.

   (b) Mustia palloja on enemmän kuin valkoisia ja valkoisia on vähintään viisi.

   Todista joko määriteltävyys tai ei määriteltävyys jommalle kummalle ominaisuudelle.

6. Esitä luonnollinen päättely, joka osoittaa, että $\{\exists x_0 \forall x_1 A\} \vdash \exists x_0 \forall x_2 B$, missä B on kaava $A(x_1/x_2)$, eikä x_2 esiinny ollenkaan kaavassa A.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiika I
Erilliskoe
20.5.2008

1. Esitä propositiolauseen A kanssa ekvivalentti propositiolause, joka on disjunktiivisessa normaalimuodossa, kun

   (a) A on $\neg(p_0 \leftrightarrow p_1)$.

   (b) A on $\neg(p_0 \vee p_1) \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5$.

   (c) A on tautologia.

   Vihje: kohdissa (b) ja (c) ei kannata tehdä totuustaulua (ainakaan koko lauseelle A), vaan ratkaisu löytyy muuta kautta helpommin.

2. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{(A \wedge B) \vee C\} \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

3. Näytä miten semanttisen puun avulla konstruoidaan malli lauseelle

$$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1).$$

   Voiko lause toteuta mallissa jonka universumi on äärellinen joukko?

4. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = [3,5) = \{x \in \mathbf{R} : 3 \leq x < 5\}$$

   ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 3 \leq x < y < 5\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että $\mathcal{M}$ toteuttaa lauseen $\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_1, x_0)$.

5. Kurssilla esitetty korollaari ei riitä kaikkiin pallomallien määrittelemättömyystuloksiin. Yksi alla esitetyistä pallomallien ominaisuuksista ei ole määriteltävä. Todista ettei kyseinen ominaisuus ole määriteltävä käyttäen hyväksi seuraavaa väitettä: Jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat pallomalleja, joissa on yhtä monta mustaa palloa ja kummassakin on vähintään n valkoista palloa, niin $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat n-ekvivalentit.

   (a) Jos mustia palloja on 99, niin valkoisia on vähintään viisi kertaa niin monta kuin mustia.

   (b) Jos mustia palloja on viisi, niin valkoisia palloja on viidellä jaollinen määrä.

   (c) Jos mustia palloja on viisi, niin valkoisia on eri määrä kuin mustia.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiika I
Erilliskoe
12.6.2008

1. Esitä propositialauseen $p_0 \leftrightarrow p_1$ kanssa ekvivalentti lause joka on
   (a) Konjunktiivisessa normaalimuodossa.
   (b) Disjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\neg A \wedge \neg B\} \vdash \neg(A \vee B).$$

3. Näytä miten semanttisen puun avulla konstruoidaan malli lauseelle

$$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1).$$

   Voiko lause toteuta mallissa jonka universumi on äärellinen joukko?

4. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = [3, 5) = \{x \in \mathbf{R} : 3 \leq x < 5\}$$

   ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3 \leq x < y < 5\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että $\mathcal{M}$ toteuttaa lauseen $\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_1, x_0)$.

5. Yksi seuraavista pallomallien ominaisuuksista ei ole määriteltävä. Todista ettei kyseinen ominaisuus ole määriteltävä.
   (a) Jos mustia palloja on enemmän kuin kolme, niin valkoisia on enemmän kuin 50.
   (b) Jos valkoisia palloja on vähemmän kuin viisikymmentä, niin mustia ja valkoisia on saman verran.
   (c) Jos mustia palloja on kolmella jaollinen määrä, niin valkoisia on viidellä jaollinen määrä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiika I
Erilliskoe
14.8.2008

1. Esitä propositiolauseen A kanssa ekvivalentti propositiolause, joka on disjunktiivisessa normaalimuodossa, kun

   (a) A on $p_0 \leftrightarrow p_1$.

   (b) A on $\neg(p_0 \vee p_1) \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5$.

   (c) A on tautologia.

   Vihje: kohdissa (b) ja (c) ei kannata tehdä totuustaulua (ainakaan koko lauseelle A), vaan ratkaisu löytyy muuta kautta helpommin.

2. Onko propositiologiikan lausejoukko

$$\{p_0 \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow \neg p_0\}$$

   ristiriidaton? Perustele vastaus.

3. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

   ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(m, n) \in \mathbf{N}^2 : m < n\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että $\mathcal{M}$ toteuttaa lauseen $\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_1, x_0)$.

4. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\forall x_0(P_0(x_0) \leftrightarrow P_1(x_0)), P_0(c_0) \vee \exists x_0 P_1(x_0)\} \vdash \exists x_1 P_0(x_1).$$

5. Kurssilla esitetty korollaari ei riitä kaikkiin pallomallien määrittelemättömyystuloksiin. Yksi alla esitetyistä pallomallien ominaisuuksista ei ole määriteltävä. Todista ettei kyseinen ominaisuus ole määriteltävä käyttäen hyväksi seuraavaa väitettä: Jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat pallomalleja, joissa on yhtä monta mustaa palloa ja kummassakin on vähintään n valkoista palloa, niin $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat n-ekvivalentit.

   (a) Jos mustia palloja on vähemmän kuin kuusi, niin valkoisten määrä on jaollinen mustien määrällä.

   (b) Jos mustia palloja on vähemmän kuin kuusi, niin valkoisia on enemmän kuin kuusi

   (c) Jos mustia palloja on enemmän kuin kuusi, niin valkoisia on enemmän kuin 6000.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
21.10.2008

1. Esitä propositialauseen $p_0 \leftrightarrow p_1$ kanssa ekvivalentti lause joka on
   (a) Konjunktiivisessa normaalimuodossa.
   (b) Disjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Konstruoi luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\neg A \wedge \neg B\} \vdash \neg(A \vee B).$$

3. Näytä miten semanttisen puun avulla konstruoidaan malli lauseelle

$$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1).$$

   Voiko lause toteuta mallissa jonka universumi on äärellinen joukko?

4. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\operatorname{dom}(\mathcal{M}) = [3, 5) = \{x \in \mathbf{R} : 3 \leq x < 5\}$$

   ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3 \leq x < y < 5\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että $\mathcal{M}$ toteuttaa lauseen $\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_1, x_0)$.

5. Yksi seuraavista pallomallien ominaisuuksista ei ole määriteltävä. Todista ettei kyseinen ominaisuus ole määriteltävä.
   (a) Jos mustia palloja on enemmän kuin kolme, niin valkoisia on enemmän kuin 50.
   (b) Jos valkoisia palloja on vähemmän kuin viisikymmentä, niin mustia ja valkoisia on saman verran.
   (c) Jos mustia palloja on kolmella jaollinen määrä, niin valkoisia on viidellä jaollinen määrä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Loppukoe/Huuskonen
17.12.2008

1. Esitä propositiolauseen $(p_0 \to p_1) \to p_1$ konjunktiivinen normaalimuoto. Perustele esim. totuustaulun avulla.

2. Tutki semanttisen puun avulla, ovatko propositiolauseet $(p_0 \to p_1) \to p_1$ ja $p_0 \vee p_1$ loogisesti ekvivalentit.

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle:
$$\{\neg\exists x_1 P_0(x_1) \vee \exists x_1 P_1(x_1)\} \vdash \exists x_1(P_0(x_1) \to P_1(x_1))$$

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta.
$$\{\exists x_1 P_0(x_1) \vee \exists x_1 P_1(x_1)\} \nvdash \exists x_1(P_0(x_1) \to P_1(x_1))$$
Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

5. Osoita, että $\{\neg, \to\}$ on täydellinen konnektiivijoukko. Voit pitää tunnettuna, että $\{\neg, \wedge\}$ on täydellinen konnektiivijoukko.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Loppukoe/Huuskonen
3.3.2009

1. Esitä allaolevan propositiolauseen disjunktiivinen normaalimuoto. Perustele esim. totuustaulun avulla.

   Present the disjunctive normal form of the propositional formula below. Justify e.g. with a truth table.

   $$(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow \neg p_1$$

2. Todista semanttisen puun avulla, että allaolevat predikaattilogiikan lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

   Prove with the tableaux method that the following sentences of predicate logic are logically equivalent.

   (a) $\exists x_0(P_0(x_0) \vee R_1(x_0, c_0))$

   (b) $\exists x_0 P_0(x_0) \vee \exists x_1 R_1(x_1, c_0)$

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle.

   Present a formal proof (so-called "natural deduction") for the following.

   $$\{\neg(p_0 \vee p_1)\} \vdash \neg p_0 \wedge \neg p_1$$

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta. Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

   Prove the following claim about the non-existence of a formal proof (so-called "natural deduction"). Justify by applying the Soundness Theorem appropriately.

   $$\{\exists x_1 P_0(x_1) \wedge \exists x_1 P_1(x_1)\} \nvdash \exists x_1(P_0(x_1) \wedge P_1(x_1))$$

5. Osoita, että seuraavaan päättelytehtävään on olemassa ratkaisu. Täydellisyyslausetta **saa** käyttää tässä hyväksi.

   Show that the following deduction problem has a solution. You **may** use the Completeness Theorem.

   $$\vdash (p_0 \leftrightarrow \neg p_1) \leftrightarrow \neg(p_1 \leftrightarrow p_0)$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Loppukoe 11.6.2009
Huuskonen

1. Etsi totuustaulun avulla seuraavan propositiolauseen disjunktiivinen normaalimuoto.

$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_1)$$

2. Shefferin viiva | on seuraava konnektiivi:

p_0	p_1	$p_0 \mid p_1$
t	t	e
t	e	t
e	t	t
e	e	t

Osoita, että Shefferin viiva muodostaa yksinään täydellisen konnektiivijoukon. Voit käyttää hyväksi tietoa, että $\{\neg, \wedge\}$ on täydellinen konnektiivijoukko.

3. Esitä semanttinen todistus lauseelle $\neg\forall x_0 P_1(x_0)$ lauseista $\forall x_1(P_1(x_1) \to R_0(c_2, x_1))$ ja $\neg R_0(c_2, c_1)$.

4. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle.

$$\{\neg\exists x_0 P_0(x_0)\} \vdash \forall x_1 \neg P_0(x_0)$$

5. Osoita seuraava väite päättelyn mahdottomuudesta.

$$\{\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)\} \nvdash \exists x_1 \forall x_0 R_0(x_0, x_1)$$