Logiikka I

Loppukoe

16.3.2004

1. Esitä propositiolause $(p_0 \to p_1) \to (p_0 \leftrightarrow p_2)$ sekä disjunktiivisessa että konjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\exists x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0)) \to P_0(c_0)$ semanttinen todistus lauseista

$$\exists x_0 P_0(x_0) \to P_0(c_0)$$

ja

$$\exists x_0 P_1(x_0) \to P_0(c_0).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:
$\{\exists x_0 P_0(x_0) \to P_0(c_0), \exists x_0 P_1(x_0) \to P_0(c_0)\} \vdash \exists x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0)) \to P_0(c_0)$

4. Onko seuraava pallomallien ominaisuus määriteltävä: Jos valkoisia palloja on enemmän kuin kymmenen, niin mustia palloja on vahemmän kuin valkoisia? Perustele vastauksesi.

5. Olkoot A, B ja C propositiolauseita. Todista käyttämättä eheyslausetta, että jos $A \Rightarrow C$ ja $B \Rightarrow C$, niin $(A \vee B) \Rightarrow C$.

Logiikka I

Loppukoe

25.5.2004

1. Esitä propositiolause $\neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow (p_2 \wedge p_0)$ konjunktiivisessä normaalimuodossa.

2. Anna semanttinen todistus lauseelle $\exists x_0 \neg \exists x_1 R_0(x_0, x_1) \rightarrow \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:
$\{\exists x_0 \neg \exists x_1 R_0(x_0, x_1)\} \vdash \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

4. Voidaanko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lausetta
$\forall x_0 \forall x_1 R_0(x_0, x_1)$
lauseista $\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$ ja $\forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)$. Perustele vastauksesi.

5. Todista käyttämättä eheyslausetta: Jos $A \Rightarrow B$, niin $A \Rightarrow \forall x_0 B$, kun x_0 ei esiinny vapaana kaavassa A. (Huomaa, että tämä on eheyslauseen todistuksen universaalikvanttorin tuontiin liittyvä askel.)

Logiikka I

Loppukoe

18.6.2004

1. Esitä propositiolause $(p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)) \rightarrow \neg(p_1 \rightarrow p_0)$ disjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\exists x_0 R_0(x_0, x_0)$ semanttinen todistus lauseista

$$\exists x_0 P_0(x_0)$$

ja

$$\forall x_0 (P_0(x_0) \rightarrow \forall x_1 R_0(x_0, x_1)).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:

$$\{\exists x_0 P_0(x_0), \forall x_0 (P_0(x_0) \rightarrow \forall x_1 R_0(x_0, x_1))\} \vdash \exists x_0 R_0(x_0, x_0).$$

4. Näytä, että luonnollisen päättelyn systeemissä ei voi päätellä lausetta

$$\exists x_0 R_0(x_0, x_0)$$

lauseesta $\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$.

5. Todista: Jos $A \wedge C \Rightarrow B$, niin $\exists x_0 A \wedge C \Rightarrow B$, kun x_0 ei esiinny vapaana kaavoissa B ja C. (Huomaa, että tämä on eheyslauseen todistuksen eksistenssikvanttorin eliminointiin liittyvä askel.)

Logiikka I

Loppukoe

10.8.2004

1. Esitä propositiolause $(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$ disjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\neg\forall x_0(\neg P_0(x_0) \vee \neg P_1(x_0))$ semanttinen todistus lauseesta $\exists x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))$.

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:
$\{\exists x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))\} \vdash \neg\forall x_0(\neg P_0(x_0) \vee \neg P_1(x_0))$.

4. Voidaanko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lause $\forall x_0(P_0(x_0) \rightarrow \forall x_0 P_0(x_0))$.

5. Onko seuraava pallomallien ominaisuus määriteltävä: Jos mustia palloja on vähintäin kahdeksan, niin mustien pallojen lukumäärä on kolmella jaollinen. Perustele vastauksesi.

Logiikka I

Loppukoe

11.11.2004

1. Olkoon $f : \{t, e\}^3 \to \{t, e\}$ jolla $f(x, y, z) = t$ jos vähintäin kaksi totuusarvoista x, y ja z on t ja muuten $f(x, y, z) = e$. Etsi konjunktiivisessä normaalimuodossa oleva propositiolause A siten että $TF_A = f$.

2. Anna lauseelle $\forall x_0 \exists x_1 R_1(x_0, x_1)$ semanttinen todistus lauseista

$$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1),$$

ja

$$\forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \to R_1(x_0, x_1)).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:

$$\{\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1), \forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \to R_1(x_0, x_1))\} \vdash \forall x_0 \exists x_1 R_1(x_0, x_1).$$

4. Todista: $\neg \forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1) \Rightarrow \forall x_1 \exists x_0 \neg R_0(x_0, x_1)$.

5. Olkoon $L = \{R_0\}$ ja L-mallit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ sellaisia, että

$$dom(\mathcal{M}) = dom(\mathcal{N}) = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

$$R_0^{\mathcal{M}} = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,0)\}$$

ja

$$R_0^{\mathcal{N}} = \{(2,4), (3,1), (0,2), (1,0), (4,3)\}.$$

Ovatko mallit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ isomorfisia? Perustele vastauksesi.

Logiikka I

Loppukoe

21.3.2005

1. Esitä propositiolause $\neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$ konjunktiivisessä normaalimuodossa.

2. Anna semanttinen todistus lauseelle

$$(\exists x_0 P_0(x_0) \vee \exists x_0 P_1(x_0)) \rightarrow \neg\forall x_0(\neg P_0(x_0) \wedge \neg P_1(x_0)).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (käyttämättä täydellisyyslausetta):

$$\{\exists x_0 P_0(x_0) \vee \exists x_0 P_1(x_0)\} \vdash \neg\forall x_0(\neg P_0(x_0) \wedge \neg P_1(x_0)).$$

4. Voidaanko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lause

$$\neg\forall x_0(\neg P_0(x_0) \vee \neg P_1(x_0))$$

lauseesta $\exists x_0 P_0(x_0) \wedge \exists x_0 P_1(x_0)$?

5. Oletetaan, että A, B, C ja D ovat propositiolauseita. Todista, että jos $A \Rightarrow C$ ja $B \Rightarrow D$, niin $(A \vee B) \Rightarrow (C \vee D)$.

Logiikka I

Loppukoe

24.5.2005

1. Esitä propositiolause $(\neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2)$ disjunktiivisessä normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\forall x_0 \neg \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$ semanttinen todistus lauseesta $\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$.

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (käyttämättä täydellisyyslausetta): $\{\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)\} \vdash \forall x_0 \neg \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

4. Voidaanko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lausetta $\forall x_0 R_0(x_0, x_0)$ lauseista $\exists x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$ ja $\forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)$? Perustele vastauksesi.

5. Voidaanko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lausetta
$\forall x_0 (P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))$
lauseesta $\neg \exists x_0 (\neg P_0(x_0) \wedge \neg P_1(x_0))$? Perustele vastauksesi.

Logiikka I

Loppukoe

10.8.2005

1. Esitä propositiolause $(\neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2)$ konjunktiivisessä normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\neg\forall x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))$ semanttinen todistus lauseesta $\exists x_0(\neg P_0(x_0) \vee \neg P_1(x_0))$.

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:
$\{\exists x_0(\neg P_0(x_0) \vee \neg P_1(x_0))\} \vdash \neg\forall x_0(P_0(x_0) \wedge P_1(x_0))$.

4. Onko teoria T ristiriidaton kun teorian T aksioomat ovat
$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$,
$\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_1, x_0)$,
$\forall x_0 \forall x_1 (R_0(x_0, x_1) \rightarrow \neg R_0(x_1, x_0))$,
$\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((R_0(x_0, x_1) \wedge R_0(x_1, x_2)) \rightarrow \neg R_0(x_0, x_2))$.

5. Onko seuraava pallomallien ominaisuus määriteltävä: Jos mustia palloja on enintään seitsemän, niin mustien pallojen lukumäärä on neljällä jaollinen.

Logiikka I

Loppukoe

25.10.2005

1. Etsi propositiolause A jolla $v(A) = t$ jos ja vain jos vähintäin kaksi totuusarvoista $v(p_0)$, $v(p_1)$ ja $v(p_2)$ on e.

2. Anna semanttinen todistus lauseelle
$$\forall x_0 \forall x_1 R_0(x_0, x_1) \vee \exists x_0 \exists x_1 \neg R_0(x_0, x_1).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (siis käyttämättä täydellisyyslausetta):
$$\vdash \forall x_0 \forall x_1 R_0(x_0, x_1) \vee \exists x_0 \exists x_1 \neg R_0(x_0, x_1).$$

4. Voiko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä
$$\vdash \exists x_0 (P_0(x_0) \to \forall x_0 P_0(x_0))?$$

5. Todista käyttämättä eheyslausetta: Jos $A \Rightarrow B$, niin $A \Rightarrow \forall x_0 B$, kun x_0 ei esiinny vapaana kaavassa A. (Huomaa, että tämä on eheyslauseen todistuksen universaalikvanttorin tuontiin liittyvä askel.)

Helsingin Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen Laitos
Logiikka 1
Loppukoe 7.3.2006

1. Anna luonnollinen päättely

$$\{\forall x_0(R_0(x_0) \rightarrow P_0(x_0))\} \vdash \forall x_0 R_0(x_0) \rightarrow \forall x_0 P_0(x_0).$$

2. Onko propositiolause $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_2$ propositiolauseen $p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_2)$ looginen seuraus? Anna tarkka perustelu!

3. Anna semanttinen todistus predikaattilogiikan lauseelle

$$\exists x_0(P_0(x_0) \wedge \neg P_1(x_0)) \vee \forall x_1(P_0(x_1) \rightarrow P_1(x_1)).$$

4. Anna luonnollinen päättely $\{A \rightarrow B\} \vdash \neg B \rightarrow \neg A$.

5. Osoita, että $\{\vee, \wedge\}$ ei ole täydellinen konnektiivijoukko.

Logiikka I

Loppukoe

18.5.2006

1. Esitä propositiolause $(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow \neg(p_1 \leftrightarrow p_2)$ disjunktiivisessä normaalimuodossa.

2. Anna semanttinen todistus lauseelle $\exists x_0 P_1(x_0)$ lauseista $\exists x_0 \neg P_0(x_0)$ ja $\forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))$.

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (siis käyttämättä täydellisyyslausetta):

$$\{\exists x_0 \neg P_0(x_0), \forall x_0(P_0(x_0) \vee P_1(x_0))\} \vdash \exists x_0 P_1(x_0).$$

4. Voiko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lausetta $\forall x_0 P_0(x_0)$ lauseista $\exists x_0 P_0(x_0)$ ja $\forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)$.

5. Todista käyttämättä eheyslausetta: Jos $A \Rightarrow B$, niin $A \Rightarrow \forall x_0 B$, kun x_0 ei esiinny vapaana kaavassa A. (Huomaa, että tämä on eheyslauseen todistuksen universaalikvanttorin tuontiin liittyvä askel.)

Logiikka I

Loppukoe

9.8.2006

1. Etsi propositiolause A jolla $v(A) = t$ jos ja vain jos totuusarvoista $v(p_0)$, $v(p_1)$ ja $v(p_2)$ pariton määrä on e.

2. Olkoon $L = \{R_0\}$ ja M L-malli jolla $dom(M) = \{0, 1, 2\}$ ja
$$R_0^M = \{(0,1),(1,2),(2,1)\}.$$
Onko L-lause $\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_1, x_0)$ totta mallissa M. Perustele vastauksesi tarkasti Tarkin totuusmääritelmään vetoamalla.

3. Anna semanttinen todistus lauseelle
$$\exists x_0(P_0(x_0) \to \forall x_0 P_0(x_0)).$$

4. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (siis käyttämättä täydellisyyslauseta):
$$\vdash \exists x_0(\neg P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_0(x_0)).$$
Vihje: Oleta väitteen negaatio ja $\neg P_0(x_0)$, päättele näista ristiriita ja sitten negaation tuonnilla $\neg\neg P_0(x_0)$. Tämän jälkeen päättele uudelleen ristiriita.

5. Todista käyttämättä eheyslausetta: Jos $A \wedge C \Rightarrow B$, niin $\exists x_0 A \wedge C \Rightarrow B$, kun x_0 ei esiinny vapaana kaavoissa C ja B. (Huomaa, että tämä on eheyslauseen todistuksen eksistenssikvanttorin eliminointiin liittyvä askel.)

Logiikka I

Loppukoe

24.10.2006

1. Esitä propositiolause $(\neg(p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge p_2)$ disjunktiivisessä normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $A \to \forall x_0 \neg B$ semanttinen todistus lauseesta $A \to \neg\exists x_0 B$.

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (käyttämättä täydellisyyslausetta):

$$\{A \to \neg\exists x_0 B\} \vdash A \to \forall x_0 \neg B,$$

kun x_0 ei esiinny vapaana kaavassa A.

4. Voidaanko luonnollisen päättelyn systeemissä päätellä lausetta $\forall x_0 R_0(x_0, x_0)$ lauseista $\exists x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)$ ja $\forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)$? Perustele vastauksesi.

5. Onko seuraava pallomallien ominaisuus määriteltävä: Jos mustia palloja on enintäin kolme niin mustia palloja on enemmän kuin valkoisia.

Logiikka I

Loppukoe

20.12.2006

1. Esitä propositiolause $(p_0 \vee (p_1 \wedge p_2)) \to \neg(p_1 \to p_0)$ disjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\exists x_0 R_0(x_0, x_0)$ semanttinen todistus lauseista

$$\exists x_0 P_0(x_0)$$

ja

$$\forall x_0(P_0(x_0) \to \forall x_1 R_0(x_0, x_1)).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:

$$\{\exists x_0 P_0(x_0), \forall x_0(P_0(x_0) \to \forall x_1 R_0(x_0, x_1))\} \vdash \exists x_0 R_0(x_0, x_0).$$

4. Päteekö luonnollisen päättelyn systeemissä, että

$$\{\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1)\} \vdash \exists x_1 R_0(x_1, x_1)?$$

5. Mikä on lauseen $\exists x_0(\forall x_1 R_0(x_0, x_1) \to \exists x_2 P_0(x_2))$ kvanttoriaste? Perustele vastauksesi tarkasti.

Logiikka I

Loppukoe

6.3.2007

1. Esitä propositiolause $(p_0 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_2$ disjunktiivisessa normaalimuodossa.

2. Anna lauseelle $\forall x_0 \neg P_0(x_0)$ semanttinen todistus lauseista

$$\exists x_0 P_0(x_0) \rightarrow P_1(c_0)$$

ja

$$\forall x_0 \neg P_1(x_0).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:

$$\{\exists x_0 P_0(x_0) \rightarrow P_1(c_0), \forall x_0 \neg P_1(x_0)\} \vdash \forall x_0 \neg P_0(x_0).$$

4. Todista käyttämättä täydellisyyslausetta, että jos $A \Rightarrow B$ ja x_0 ei esiinny vapaana A:ssa, niin $A \Rightarrow \forall x_0 B$.

5. Todista: $\{\exists x_0 P_0(x_0), \forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1)\} \Rightarrow \forall x_0 P_0(x_0)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Loppukoe/Huuskonen
22.5.2007

1. Mikä on propositiolauseen $(p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_0 \wedge p_1)$ konjunktiivinen normaalimuoto? Perustele totuustaulun avulla.

2. Esitä semanttinen todistus seuraavalle lauseelle:

$$\forall x_1(P_0(x_1) \leftrightarrow R_0(x_1, x_1)) \rightarrow (P_0(c_0) \vee \neg\forall x_0 R_0(c_0, x_0)).$$

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle:

$$\{\forall x_1(P_0(x_1) \leftrightarrow R_0(x_1, x_1), \neg P_0(c_0)\} \vdash \neg\forall x_0 R_0(c_0, x_0).$$

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta.

$$\{P_0(c_0) \vee \neg\forall x_0 R_0(c_0, x_0)\} \nvdash \forall x_1(P_0(x_1) \leftrightarrow R_0(x_1, x_1)).$$

Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

5. Osoita, ettei joukko $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ ole täydellinen konnektiivijoukko.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Loppukoe/Huuskonen
14.6.2007

1. Osoita totuustaululla, että propositiolauseet $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow p_0$ ja $p_0 \wedge p_1$ ovat loogisesti ekvivalentit.

2. Osoita semanttisen puun avulla, että propositiolauseet $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow p_1$ ja $p_0 \vee p_1$ ovat loogisesti ekvivalentit.

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle:

$$\{\exists x_1(P_0(x_1) \wedge P_1(x_1))\} \vdash \exists x_1 P_0(x_1) \wedge \exists x_1 P_1(x_1)$$

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta.

$$\{\exists x_1 P_0(x_1) \wedge \exists x_1 P_1(x_1)\} \nvdash \exists x_1(P_0(x_1) \wedge x_1 P_1(x_1))$$

Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

5. Olkoon $(A_1, \ldots, A_n)$ semanttisen puun avoin lopullinen oksa, jolla on muotoa $\neg(B \to C)$ oleva kaava A_i, missä siis $1 \leq i \leq n$. Olkoon edelleen v sellainen totuusjakauma, että $v(A_j) = t$ aina, kun $i < j \leq n$. Osoita, että $v(A_n) = t$.