Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
2. kurssikoe
29.4.2008

1. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = (-2, 2] = \{x \in \mathbf{R} : -2 < x \leq 2\}$$

ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2 < x < y \leq 2\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että $\mathcal{M}$ toteuttaa lauseen $\neg\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_1, x_0)$.

2. Konstruoi lauseen $\exists x_0 \exists x_1 \neg((P_0(x_0) \leftrightarrow \neg P_1(x_1))$ semanttinen puu, jossa on lopullinen avoin oksa. Konstruoi tämän oksan avulla malli, joka toteuttaa lauseen. Voiko lause toteutua mallissa, jonka universumissa on vähemmän alkioita, kuin oksan tuottaman mallin universumissa?

3. Esitä luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\neg P_0(F_0^1(c_0))\} \vdash \neg\forall x_0 P_0(x_0).$$

Vihje: $\{\neg P_0(F_0^1(c_0))\} \vdash \exists x_0 \neg P_0(x_0)$ ja $\{\exists x_0 \neg P_0(x_0)\} \vdash \neg\forall x_0 P_0(x_0)$.

4. Yksi kahdesta alla esitetystä pallomallien ominaisuudesta ei ole määriteltävä. Osoita kurssin lauseita ja tuloksia käyttäen, että kyseinen ominaisuus ei ole määriteltävä.

   (a) Mustia on vähemmän kuin 40 ja valkoisia on enemmän kuin mustia.

   (b) Mustia on tasan 40 kertaa niin paljon kuin valkoisia.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
2. kurssikoe
9.5.2008

1. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(n, m) \in \mathbf{N}^2 : m = 3n\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että

$$\mathcal{M} \models \forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1).$$

2. Konstruoi lauseen $\exists x_0 \neg \forall x_1 \neg((P_0(x_0) \to P_1(x_1)) \wedge (P_1(x_1) \to P_0(x_0)))$ semanttinen puu, jossa on lopullinen avoin oksa. Konstruoi tämän oksan avulla malli, joka toteuttaa lauseen. Voiko lause toteutua mallissa, jonka universumissa on vähemmän alkioita, kuin oksan tuottaman mallin universumissa?

3. Esitä luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\neg \exists x_0 \neg P_0(x_0)\} \vdash P_0(F_0^1(c_0)).$$

Vihje: $\{\neg \exists x_0 \neg P_0(x_0)\} \vdash \forall x_0 P_0(x_0)$ ja $\{\forall x_0 P_0(x_0)\} \vdash P_0(F_0^1(c_0))$.

4. Kurssilla esitetty korollaari ei riitä kaikkiin pallomallien määrittelemättömyystuloksiin. Yksi alla esitetyistä pallomallien ominaisuuksista ei ole määriteltävä. Todista ettei kyseinen ominaisuus ole määriteltävä käyttäen hyväksi seuraavaa väitettä: Jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat pallomalleja, joissa on yhtä monta mustaa palloa ja kummassakin on vähintään n valkoista palloa, niin $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ ovat n-ekvivalentit.

   (a) Jos mustia palloja on 99, niin valkoisia on vähintään viisi kertaa niin monta kuin mustia.

   (b) Jos mustia palloja on viisi, niin valkoisia palloja on viidellä jaollinen määrä.

   (c) Jos mustia palloja on viisi, niin valkoisia on eri määrä kuin mustia.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
2. kurssikoe, korvaava
13.5.2008

HUOM! Tämä on kurssikokeen korvaavana kokeena kahden tunnin koe, noin klo. 12-14. Pyydä valvojaa merkitsemään vastauspaperiin sisäänjättöaika.

1. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$. Määritellään L-malli $\mathcal{M}$ asettamalla

$$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = (-2, 2] = \{x \in \mathbf{R} : -2 < x \leq 2\}$$

   ja $R_0^{\mathcal{M}} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2 < x < y \leq 2\}$. Osoita suoraan Tarskin totuusmääritelmään nojautuen, että $\mathcal{M}$ toteuttaa lauseen $\exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)$.

2. Olkoon x_0 ainoa kaavassa A vapaana esiintyvä muuttuja. Konstruoi lauseen $P_0(c_1) \wedge (\forall x_0 A \wedge \exists x_0 \neg(P_0(c_1) \leftrightarrow A))$ lopullinen semanttinen puu ja päättele siitä onko kyseisellä lauseella mallia.

3. Esitä luonnollinen päättely, joka osoittaa, että

$$\{\neg P_0(F_0^1(c_0))\} \vdash \neg \forall x_0 P_0(x_0).$$

   Vihje: $\{\neg P_0(F_0^1(c_0))\} \vdash \exists x_0 \neg P_0(x_0)$ ja $\{\exists x_0 \neg P_0(x_0)\} \vdash \neg \forall x_0 P_0(x_0)$.

4. Yksi kahdesta alla esitetystä pallomallien ominaisuudesta ei ole määriteltävä. Osoita kurssin lauseita ja tuloksia käyttäen, että kyseinen ominaisuus ei ole määriteltävä.

   (a) Mustia on vähemmän kuin 40 ja valkoisia on enemmän kuin mustia.

   (b) Mustia on tasan 40 kertaa niin paljon kuin valkoisia.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
2. kurssikoe
5.5.2009

1. Olkoon $L = \{Nuoli(x, y)\}$. Formalisoi seuraavat suhteikkoja koskevat väitteet predikaattilogiikassa aakkostossa L:
   (a) Jokaisesta solmusta menee nuoli solmuun itseensä.
   (b) Jokaista nuolta vastaa päinvastaiseen suuntaan menevä nuoli samojen solmujen välillä.
   (c) Aina, kun yhdestä solmusta menee nuoli toiseen ja toisesta edelleen kolmanteen, myös ensimmäisestä solmusta menee nuoli suoraan kolmanteen.
2. Osoita määritelmien perusteella, ettei kaava $\exists x_0 R_0(x_0, x_1)$ ole kaavan $\exists x_1 \forall x_0 R_0(x_0, x_1)$ looginen seuraus.
3. Osoita formaalisti ns. luonnollisella päättelyllä
$$\vdash \neg(\forall x_0 \neg P_0(x_0) \wedge \exists x_1 P_0(x_1)).$$
4. Perustele täsmällisesti, miksi seuraavanlainen luonnollinen päättely on olemassa:
$$\vdash \neg\forall x_0 \exists x_1 R_0(x_0, x_1) \leftrightarrow \exists x_0 \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1).$$
   Kaikkia oppikirjassa ja luennoilla esitettyjä väitteitä saa pitää tunnettuina. (Vihje: Vaaditunlaisen päättelyn esittäminen on ilman muuta riittävä vastaus, mutta on olemassa helpompikin tapa.)