Logiikka I

2. välikoe

16.5.2005

1. Olkoon aakkosto $L = \{R_0\}$, M L-malli ja w mallin M tulkintajono. Näytä suoraan Tarskin totuusmääritelmään vedoten, että

$$M \models_w \forall x_0(\exists x_1 R_0(x_0, x_1) \vee \forall x_1 \neg R_0(x_0, x_1)).$$

2. Anna lauseelle $\exists x_0 P_1(x_0)$ semanttinen todistus lauseista $\forall x_0 P_0(x_0)$ ja

$$\exists x_0(P_0(x_0) \rightarrow P_1(x_0)).$$

3. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä (käyttämättä täydellisyyslausetta):

$$\{\forall x_0 P_0(x_0), \exists x_0(P_0(x_0) \rightarrow P_1(x_0))\} \vdash \exists x_0 P_1(x_0).$$

4. Onko seuraava pallomallien ominaisuus määriteltävä: mallin alkioiden lukumäärä on viidellä jaollinen. Perustele vastauksesi.

Logiikka I

2. välikoe

8.5.2006

1. Anna lauseelle $\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$ semanttinen todistus lauseesta $\forall x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$.
(Eli laadi lauseelle $\forall x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0)) \wedge \neg(\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0))$ semanttinen puu, jonka maksimaaliset oksat ovat suljettuja.)

2. Todista luonnollisen päättelyn systeemissä:

$$\{\forall x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))\} \vdash \exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0).$$

3. Näytä, että luonnollisen päättelyn systeemissä ei voi päätellä lausetta $\forall x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$ lauseesta $\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$ laatimalla lauseelle $(\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)) \wedge \neg\forall x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$ lopullinen semanttinen puu ja konstruoimalla tamän semanttisen puun avoimen oksan avulla malli M jossa $\exists x_0 P_0(x_0) \to \exists x_0 P_1(x_0)$ on totta mutta $\forall x_0(P_0(x_0) \to P_1(x_0))$ on epätotta.

4. Olkoon aakkosto $L = \{P_0\}$, M L-malli ja w mallin M tulkintajono. Näytä suoraan Tarskin totuusmääritelmään vedoten, että

$$M \models_w \exists x_0(\exists x_0 P_0(x_0) \to P_0(x_0)).$$

Vihje: Tarkastele erikseen tapaukset $P_0^M = \emptyset$ ja $P_0^M \neq \emptyset$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Logiikka I

2. kurssikoe

8.5.2007

1. Todista semanttisesti, että lause $\forall x_1(P_0(x_1) \to P_1(x_1))$ on lauseen $\neg\exists x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)$ looginen seuraus.

2. Osoita formaalisti ns. luonnollisella päättelyllä

$$\{\neg\exists x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0)\} \vdash \forall x_1(P_0(x_1) \to P_1(x_1)).$$

3. Osoita (vastaesimerkillä, kuten kirjassa), ettei edellisen tehtävän oletusta ja johtopäätöstä voida vaihtaa keskenään, ts.

$$\{\forall x_1(P_0(x_1) \to P_1(x_1))\} \nvdash \neg\exists x_0 P_0(x_0) \vee \forall x_0 P_1(x_0).$$

   Perustele Tarskin totuusmääritelmän sekä eheys- ja täydellisyyslauseen avulla.

4. Toinen seuraavista pallomallien ominaisuuksista on määriteltävä (ts. ilmaistavissa predikaattilogiikan lauseella), toinen ei. Kumpi on kumpi?

   (a) Jos palloja on yhteensä enintään 4, niin mustia palloja on parillinen määrä.

   (b) Jos palloja on yhteensä vähintään 4, niin valkoisia palloja on pariton määrä.

   Riittää, että perustelet vastauksesi yhden (kumman tahansa) ominaisuuden osalta. Kaikkia oppikirjassa todistettuja väitteitä saa käyttää hyväksi.

   HUOM! Tehtävä pisteytetään perustelujen mukaan. Pelkästä arvauksesta ei saa yhtään pistettä, vaikka se sattuisi olemaan oikea.