Department of Mathematics and Statistics
Logic I
Examination (erilliskoe)
Mar 4. 2008

1. Let $\{B_0, B_1, \ldots, B_5\}$ be a set of propositional variables. Write a propositional sentence which is logically equivalent to F and is in disjunctive normal form, when

   (a) F is $\neg(B_0 \Leftrightarrow B_1)$.

   (b) F is $\neg(B_0 \vee B_1) \wedge B_2 \wedge \neg B_3 \wedge B_4 \wedge \neg B_5$.

   (c) F is a tautology.

2. Let A, B, and C be propositional variables. Show that the formulas

$$(C \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)))) \text{ and } (C \Rightarrow (B \Rightarrow A))$$

   are logically equivalent.

3. Let T be a theory and F and G closed formulas. Show that if F is a semantic consequence of T and $\{F\} \vdash G$ then G is a semantic consequence of T.

4. Let L be a first order language and let $A[x, y]$ be an arbitrary formula of L with two free variables. Is the formula

$$\forall x \exists y A[x, y] \Rightarrow \exists y \forall x A[x, y]$$

   satisfied in any L-structure?

5. Show that if two formulas are univerally equivalent then so are their universal closures.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I
Loppukoe/Huuskonen
3.3.2009

1. Esitä allaolevan propositiolauseen disjunktiivinen normaalimuoto. Perustele esim. totuustaulun avulla.

   Present the disjunctive normal form of the propositional formula below. Justify e.g. with a truth table.

$$(p_0 \leftrightarrow p_1) \to \neg p_1$$

2. Todista semanttisen puun avulla, että allaolevat predikaattilogiikan lauseet ovat loogisesti ekvivalentit.

   Prove with the tableaux method that the following sentences of predicate logic are logically equivalent.

   (a) $\exists x_0(P_0(x_0) \vee R_1(x_0, c_0))$
   (b) $\exists x_0 P_0(x_0) \vee \exists x_1 R_1(x_1, c_0)$

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle.

   Present a formal proof (so-called "natural deduction") for the following.

$$\{\neg(p_0 \vee p_1)\} \vdash \neg p_0 \wedge \neg p_1$$

4. Todista seuraava väite formaalin todistuksen ("luonnollisen päättelyn") olemassaolemattomuudesta. Perustele soveltamalla eheyslausetta asianmukaisesti.

   Prove the following claim about the non-existence of a formal proof (so-called "natural deduction"). Justify by applying the Soundness Theorem appropriately.

$$\{\exists x_1 P_0(x_1) \wedge \exists x_1 P_1(x_1)\} \nvdash \exists x_1(P_0(x_1) \wedge P_1(x_1))$$

5. Osoita, että seuraavaan päättelytehtävään on olemassa ratkaisu. Täydellisyyslausetta **saa** käyttää tässä hyväksi.

   Show that the following deduction problem has a solution. You **may** use the Completeness Theorem.

$$\vdash (p_0 \leftrightarrow \neg p_1) \leftrightarrow \neg(p_1 \leftrightarrow p_0)$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Logiikka I/Logic I
Loppukoe/Final Exam 2009-05-19
Huuskonen

1. Etsi semanttisen puun avulla totuusjakauma, joka osoittaa, etteivät allaolevat propositiolauseet ole loogisesti ekvivalentit.

   With the help of the tableau (also called "semantic tree") method, find a truth distribution showing that the propositional sentences below are not logically equivalent.

   (a) $p_0 \leftrightarrow p_1$

   (b) $(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$

2. Osoita, että $\{\vee, \leftrightarrow\}$ ei ole täydellinen konnektiivijoukko. Perustele todistamalla sopiva väite induktiolla.

   Show that $\{\vee, \leftrightarrow\}$ is not a complete set of connectives. Justify by proving a suitable claim with induction.

3. Esitä formaali todistus (ns. "luonnollinen päättely") seuraavalle.

   Present a formal proof (so-called "natural deduction") for the following.

$$\{p_0 \rightarrow p_1, \neg p_1\} \vdash \neg(p_1 \vee p_0)$$

4. Todista valitsemallasi täsmällisellä tavalla, että allaoleva looginen seuraussuhde pätee. (Vihje: Eheyslauseen soveltaminen voi olla helpointa.)

   Prove by a rigorous method that the following logical consequence holds. You may choose the method yourself. (Hint: Applying the Soundness Theorem may be easiest.)

$$\{P_0(x_1), \forall x_0(P_0(x_0) \leftrightarrow P_1(x_0)), \forall x_1(P_1(x_0) \leftrightarrow P_2(x_0))\} \Rightarrow P_2(x_1).$$

5. Osoita, että seuraavaan päättelytehtävään on olemassa ratkaisu. Täydellisyyslausetta **saa** käyttää tässä hyväksi.

   Show that the following deduction problem has a solution. You **may** use the Completeness Theorem.

$$\vdash (p_1 \leftrightarrow (p_0 \leftrightarrow \neg p_1)) \leftrightarrow \neg p_0$$