HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Linjär algebra och matrisräkning II
Kursprov 10.12.2008

1. Bestäm egenvärdena och motsvarande egenrum till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Sök den minsta kvadratmetodens lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}.$$

Har ekvationssystemet *lösningar*, dvs. finns det sådana reella tal x_1 och x_2 som satisfierar ekvationssystemet?

3. Låt $\mathbb{R}^2$ vara försedd med den inre produkten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.
   (a) Undersök om vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonala med avseende på den inre produkten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
   (b) Bestäm en ortonormal bas till $\mathbb{R}^2$ med avseende på den inre produkten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ genom att tillämpa Gram–Schmidts metod på föjlden $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

4. (a) Låt V och W vara vektorrum och $L\colon V \to W$ en lineär avbildning. Visa att om $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ och $L(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$, där $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ och $\mathbf{b} \in W$, så är $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(L)$.
   (b) Låt $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ och $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den lineära avbildning som definieras av formeln $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Om $L_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, så är det möjligt att också $L_A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$?

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Lineär algebra och matrisräkning II
Kursförhör 12.12.2007

1. Visa att projektionen av $\mathbb{R}^3$ på x_1x_2-planet, alltså avbildningen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$L(\mathbf{x}) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$
är lineär. Bestäm $\mathrm{Ker}(L)$ och $\mathrm{Im}(L)$.

2. Bestäm minsta kvadratsummans lösningar för ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Låt $\mathbb{R}^2$ vara försedd med en inre produkt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$.
   (a) Undersök om $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonala i förhållande till inre produkten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
   (b) Bestäm en ortonormal bas för $\mathbb{R}^2$ i förhållande till inre produkten $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ genom att tillämpa Gram–Schmidt-metoden på följden $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

4. Undersök om matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
är ortogonalt diagonaliserbar. Ifall den är det, bestäm den matris P som diagonaliserar matrisen A ortogonalt, och beräkna P^TAP.

Svara på kursförfrågan

http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/index.sv.html

genast efter tenten!