

1. Bestäm egenvärdena och motsvarande egenrum till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Sök den minsta kvadratmetodens lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

Har ekvationssystemet *lösningar*, dvs. finns det sådana reella tal  $x_1$  och  $x_2$  som satisfierar ekvationssystemet?

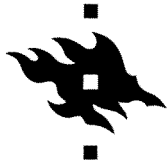
3. Låt  $\mathbb{R}^2$  vara försedd med den inre produkten  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  
 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ .

(a) Undersök om vektorena  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  och  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  är ortogonala med avseende på den inre produkten  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ .

(b) Bestäm en ortonormal bas till  $\mathbb{R}^2$  med avseende på den inre produkten  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  genom att tillämpa Gram–Schmidts metod på följden  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

4. (a) Låt  $V$  och  $W$  vara vektorrum och  $L: V \rightarrow W$  en linjär avbildning. Visa att om  $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  och  $L(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$ , där  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  och  $\mathbf{b} \in W$ , så är  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker}(L)$ .

(b) Låt  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  och  $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildning som definieras av formeln  $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . Om  $L_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  och  $\text{Ker}(L_A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ , så är det möjligt att också  $L_A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ?



1. Visa att projektionen av  $\mathbb{R}^3$  på  $x_1x_2$ -planet, alltså avbildningen  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$L(\mathbf{x}) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

är lineär. Bestäm  $\text{Ker}(L)$  och  $\text{Im}(L)$ .

2. Bestäm minsta kvadratsummans lösningar för ekvationssystemet  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Låt  $\mathbb{R}^2$  vara försedd med en inre produkt  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$ .

- (a) Undersök om  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  och  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  är ortogonala i förhållande till inre produkten  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ .
- (b) Bestäm en ortonormal bas för  $\mathbb{R}^2$  i förhållande till inre produkten  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  genom att tillämpa Gram–Schmidt-metoden på följderna  $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ .

4. Undersök om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar. Ifall den är det, bestäm den matris  $P$  som diagonaliserar matrisen  $A$  ortogonalt, och beräkna  $P^T A P$ .

Svara på kursförfrågan

<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/index.sv.html>  
genast efter tenten!