Opettajalinjan työpaja I
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 9.12.2008

Taulukkokirjan ja laskimen käyttö on sallittua. Kokeen mukana tulee teorialappu.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi vastauspaperiin kurssin nimi ja päivämäärä nimen ja opiskelijanumeron (tai sosiaaliturvatunnuksen) lisäksi. Ainakin yksi nimellä varustettu koepaperi on palautettava.

1. Määritä (normaalimuotoinen $ax + by + cz + d = 0$) yhtälö sille tasolle T, joka kulkee pisteiden $A = (2, 0, 2)$, $B = (0, 3, 3)$ ja $C = (1, 1, 0)$. Määritä pisteen $P = (2, 3, 5)$ kohtisuora projektio tasolle T.

2. Ovatko seuraavat kuvaukset $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarisia:

a) $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_1 + 2x_2)$, missä $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$,

b) $L(\mathbf{x}) = (x_1, 0, x_1^2 + x_2^2)$, missä $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$.

Jos L on lineaarinen, niin anna kannat avaruuksille $Im(L)$ ja $Ker(L)$, mikäli mahdollista.

3. a) Olkoon A ja B $n \times n$-matriiseja. Osoita determinantin avulla, että AB on kääntyvä jos ja vain jos kummatkin matriiseista A tai B ovat kääntyviä.

b) Olkoon A $n \times n$-matriisi. Onko mahdollista, että $A^2 + I = 0$ (missä I on $n \times n$-ykkösmatriisi ja 0 on nollamatriisi), kun n on pariton? Entä, jos n on parillinen? [Vihje: determinantti]

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Määritä kanta, jossa A on diagonalisoituva. Mitä on A^{55}?

Osan I asioita

- Matriisi A on **symmetrinen**, jos $A^T = A$.
- Matriisi A on **antisymmetrinen**, jos $A^T = -A$.

Määritelmä 1 *Olkoon V vektoriavaruus. V n osajoukko W on V:n **(vektori)aliavaruus**, jos V:n laskutoimitukset ovat suljettuja W:n suhteen ja W (varustettuna V:n laskutoimituksilla) on vektoriavaruus.*

Lause 2 *(Aliavaruuskriteeri) Vektoriavaruuden V osajoukko W on aliavaruus, jos W toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:*

1. *$W \neq \varnothing$,*
2. *Jos $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, niin $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$,*
3. *Jos $a \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{w} \in W$, niin $a\mathbf{w} \in W$.*

Pistetulo ja sisätulo

Määritelmä 3 *Vektorien $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ **pistetulo** on reaaliluku*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Määritelmä 4 *Kaikille $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ määritellään normi kaavalla*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}.$$

Määritelmä 5 *Vektoriavaruuden V sisätulo on kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$ (vektorien $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ sisätuloa merkitään $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$) joka toteuttaa seuraavat aksioomat:*

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in V$ ja $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jos ja vain jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
2. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,
3. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,
4. $\langle c\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = c\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

← Määr

Normi $\|\cdot\|$
$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

Lause 6 *(Schwarzin epäyhtälö) Kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (V on sisätuloavaruus) on*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|.$$

Määritelmä 7 *Määritellään kahden sisätuloavaruuden V vektorin $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ välinen kulma θ kaavalla $\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$.*

Määritelmä 8 *Jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sisätuloavaruuden vektoreita on **ortogonaalinen jono**, jos $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ kaikilla $i = 1, \ldots n$ ja $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ kaikilla $i \neq j$. Jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on **ortonormaali**, jos se on ortogonaalinen ja $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.*

Lemma 9 *Jos jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on ortogonaalinen ja $\mathbf{w} \in V$, on olemassa täsmälleen yksi $\mathbf{v} \in span(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, jolla $\mathbf{w} - \mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, k$, nimittäin*

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle}{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle} \mathbf{v}_j.$$

Määritelmä 10 *Sisätuloavaruuden V **aliavaruuden** W **kohtisuora komplementti** V:ssä on joukko*

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \text{ kaikilla } \mathbf{w} \in W\}.$$

Lause 11 *$W^\perp$ on V:n aliavaruus.*

Lause 12 *$span(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k) = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w}_j$ kaikilla $j = 1, \ldots, k\}$.*

Lause 13 *Olkoon W sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus. Silloin jokaista $\mathbf{v} \in V$ kohti on olemassa yksikäsitteiset $\mathbf{w} \in W$ ja $\mathbf{w}' \in W^\perp$, joilla $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. Vektoria $\mathbf{w}$ kutsutaan **vektorin v kohtisuoraksi projektioksi** W**:lle** ja merkitään $proj_W(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.*

Ristitulo

Määritelmä 14 *Olkoon $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ **ristitulo** määritellään kaavalla*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}.$$

(Kätevä muistikaava ristitulolle:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

missä determinantin purkamisen täytyy tapahtua ylimmän rivin suhteen.)

Lause 15 *Ristitulon ominaisuuksia:*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$,
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ ja $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$,
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} = \mathbf{u} \times \mathbf{0}$,
5. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (skalaarikolmitulo),
6. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$,
7. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$,
8. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (Lagrangen identiteetti)
9. Jos θ on vektorien u ja v välinen kulma, niin $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \sin\theta$.

Lause 16 *Vektori $\hat{\mathbf{x}}$ on yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisu täsmälleen silloin, kun $A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$.*

Lineaarikuvaukset

Määritelmä 17 *Kuvaus $L : V \to V'$ on lineaarinen (eli lineaarikuvaus), jos*

1. *$L(v + w) = L(v) + L(w)$ kaikilla $v, w \in V$.*
2. *$L(cw) = cL(w)$ kaikilla $v \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$.*

Lause 18 *Kuvaus $L : V \to V'$ on lineaarinen jos ja vain jos kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ pätee*

$$L(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = aL(\mathbf{v}) + bL(\mathbf{w}).$$

Lause 19 *Jos kuvaus $L : V \to V'$ on lineaarinen, niin $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}$*

Lause 20 *Matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ määrittelee lineaarikuvauksen $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaavalla $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.*

Määritelmä 21 *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarikuvaus (ja V ja V' vektoriavaruuksia). Määritellään L:n **kuva** $Im(L)$ ja **ydin** $Ker(L)$ seuraavasti:*

$$\begin{aligned} Im(L) &= L(V) = \{L(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \\ &= \{\mathbf{v}' \in V' \mid \mathbf{v}' = L(\mathbf{v}) \text{ jollakin } \mathbf{v} \in V\} \subset V', \\ Ker(L) &= \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{V'}\} \subset V. \end{aligned}$$

Lause 22 *$Im(L)$ on V':n aliavaruus ja $Ker(L)$ on V:n aliavaruus, kun L, V ja V' kuten edellisessä määritelmässä.*

Lause 23 *$L : V \to V'$ on injektio jos ja vain jos $Ker(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.*

Määritelmä 24 *Lineaarikuvaus, joka on bijektio, on **lineaarinen isomorfismi**.*

Lause 25 *Merkitään kannanvaihtomatriisia kannasta T kantaan S merkinnällä $M(T \to S)$ ja lineaarikuvauksen $L : V \to V'$ matriisia kantojen T ja S' suhteen $M(L; T \to S')$. Olkoon $L : V \to V'$ lineaarinen, S ja T kaksi V:n kantaa ja S' ja T' kaksi V':n kantaa. Tällöin*

$$M(L; T \to T') = M(S' \to T')M(L; S \to S')M(T \to S).$$

Determinantti

Määritelmä 26 *Olkoon A $n \times n$-matriisi. Merkitään A_{ij}:llä $(n-1) \times (n-1)$-matriisia, joka on saatu A:sta poistamalla i:s ja j:s sarake. Määritellään*

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}, \text{ jos } A = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \\ \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}, \text{ kun } n > 1. \end{aligned}$$

Lause 27 *Matriisi A voidaan purkaa minkä tahansa rivin r suhteen kaavalla*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{rk} \det A_{rk}.$$

Lause 28 *Neliömatriiseille A pätee $\det A^T = \det A$.*

Lause 29 *Matriisi A voidaan purkaa minkä tahansa sarakkeen s suhteen kaavalla*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+s} a_{is} \det A_{is}.$$

Lause 30 *Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tällöin*

1. *Jos matriisi B on saatu matriisista A vaihtamalla kaksi riviä, niin $\det B = -\det A$*
2. *Jos A:ssa on nollarivi, niin $\det A = 0$.*
3. *Jos B saadaan matriisista A kertomalla yhtä A:n riviä vakiolla c, niin $\det B = c \det A$.*
4. *Jos A:n kaksi riviä ovat identtisiä, niin $\det A = 0$.*
5. *Jos B saadaan matriisista A lisäämällä yhden rivin monikerta johonkin toiseen riviin, niin $\det B = \det A$.*

Lause 31 *Jos A ja B ovat $n \times n$-matriiseja, niin $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.*

Lause 32 *Neliömatriisi A on säännöllinen jos ja vain jos $\det A \neq 0$.*

Ominaisarvoista ja -vektoreista

Määritelmä 33 *Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A **ominaisarvo**, jos on olemassa vektori $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq 0$), jolla $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vektoria $\mathbf{v}$ kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi **ominaisvektoriksi**.*

Lause 34 *λ on matriisin A ominaisarvo jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$.*

Määritelmä 35 *Matriisi A on **diagonalisoituva**, jos on olemassa kanta, jossa matriisia A vastaava lineaarikuvauksen L_A matriisi on diagonaalinen.*

Lause 36 *Olkoon $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ matriisin A eri ominaisarvoja ja $\mathbf{v}_j$ jokin ominaisarvoon λ_j liittyvä ominaisvektori kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Tällöin jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa.*

Lause 37 *Jos A on symmetrinen ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ matriisin A eri ominaisarvoja ja $\mathbf{v}_j$ jokin ominaisarvoon λ_j liittyvä ominaisvektori kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Tällöin jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on ortogonaalinen.*

Lause 38 *Jokaista symmetristä matriisia A kohden löytyy ortonormaali kanta, jossa matriisia A vastaavan lineaarikuvauksen matriisi on diagonaalinen eli A voidaan kirjoittaa muodossa PDP^T, missä P on kannanvaihtomatriisi takaisin standardikantaan ja D on diagonaalimatriisi.*