HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 14.12.2005

1. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus
$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ missä } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Tutki, onko L isomorfismi.
   (b) Määritä $\mathrm{Ker}(L)$ ja $\mathrm{Im}(L)$.

2. Olkoot $P = (2,2,0)$, $Q = (0,4,1)$ ja $R = (-1,2,3)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä.
   (a) Määritä vektoreiden $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{PR}$ virittämän suunnikkaan pinta-ala.
   (b) Määritä tetraedrin $OPQR$ tilavuus (O on origo).

3. Myyntitietojen mukaan erään kaupan vuosittainen myynti riippuu myyjien lukumäärästä seuraavasti:

Myyjien lukumäärä	5	6	7	8	9	10
Vuosittainen myynti (M€)	2,3	3,2	4,1	5,0	6,1	7,2

   (a) Esitä data pistejoukkona (x, y)-koordinaatistossa, jossa x-akselilla on myyjien lukumäärä ja y-akselilla on vuosittainen myynti.
   (b) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
   (c) Ennusta 14 myyjällä saavutettava vuosittainen myynti.

4. Diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrinen matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$
eli määritä matriisi P, joka diagonalisoi ortogonaalisesti matriisin A, ja laske $P^T A P$.

Vastaa kurssikyselyyn

`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe (korvaava) 21.12.2005

1. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ ja $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kuvaus
$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ c+1 \end{bmatrix}, \text{ missä } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Tutki, millä vakion c arvoilla L on lineaarinen.
   (b) Määritä $\mathrm{Ker}(L)$ ja $\mathrm{Im}(L)$ silloin, kun L on lineaarinen.

2. Olkoot $P = (1, 4, -1)$, $Q = (0, 2, 1)$ ja $R = (-1, 1, 2)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä.
   (a) Määritä kolmion PQR pinta-ala.
   (b) Määritä pisteiden P, Q ja R paikkavektoreiden virittämän suuntaissärmiön tilavuus.

3. Olkoon $\mathbb{R}^3$:n kanta
$$S = ([1\ \ 1\ \ 1]^T, [-1\ \ 1\ \ 0]^T, [1\ \ 2\ \ 1]^T).$$
   (a) Määritä $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S.
   (b) Esitä kannan S vektorit ortonormaalin kannan S_0 vektoreiden lineaarikombinaatioina.

4. Laske A^{100}, kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Vastaa kurssikyselyyn

`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`

heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 26.1.2006

1. Todista, että vektorit $\mathbf{u}_1 = [1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]^T$ ja $\mathbf{u}_3 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^T$ muodostavat lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,
$$L(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \qquad \mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]^T,$$
ytimen $\mathrm{Ker}(L)$ erään kannan. Sovella tähän ytimen $\mathrm{Ker}(L)$ kantaan Gramin-Schmidtin menetelmää.

2. Olkoot $P = (1, 2, -1)$, $Q = (2, 3, 1)$ ja $R = (1, 2, -1)$.
   (a) Määritä pisteiden P, Q ja R kautta kulkevan $\mathbb{R}^3$:n tason T normaalimuotoinen yhtälö.
   (b) Määritä pisteen $S = (-3, 2, -1)$ etäisyys tasosta T. Mikä tason T piste on lähimpänä pistettä S?
   (c) Määritä pisteen S kautta kulkevan tason T kanssa yhdensuuntaisen tason T_S normaalimuotoinen yhtälö.

3. Määritä matriisi lineaarikuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kiertää ensin vektoria $45°$ origon ympäri vastapäivään, sitten peilaa vektorin x_2-akselin suhteen ja viimeiseksi projisoi vektorin x_1-akselille. Määritä L:n kuva ja ydin. Onko L injektio tai surjektio? Onko L isomorfismi? Onko kuvaus L sama riippumatta siitä, missä järjestyksessä kierto, peilaus ja projisointi suoritetaan?

4. Olkoon $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ylä- tai alakolmiomatriisi.
   (a) Osoita, että A on säännöllinen, jos ja vain jos kaikki A:n lävistäjäalkiot ovat nollasta poikkeavia.
   (b) Määritä käänteismatriisin A^{-1} lävistäjäalkiot, kun A on säännöllinen.

5. Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja siihen liittyvä neliömuoto $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ovat *positiivisesti definiittejä*, jos $q(\mathbf{x}) > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Osoita, että symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos kaikki A:n ominaisarvot ovat positiivisia.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 3.4.2006

1. Määrää matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   käänteismatriisin.

2. Mitkä ovat matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

   ominaisarvot?

3. Määrää ortonormaali kanta vektoreitten $(0,3,0,4), (4,0,3,0), (4,3,3,4)$ ja $(4,-3,3,-4)$ virittämälle aliavaruudelle.

4. Lineaarikuvaus $l : R^3 \to R^3$ toteuttaa

$$L(x,y,z) = (x+y, 2y+z, x+y+z).$$

   Kappaleen

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 2t \le 3z \le 6\}$$

   kuvan $L(T)$ tilavuus määrättävä.

5. Avaruuden R^3 taso T_1 kulkee pisteiden $(0,1,1), (1,1,0)$ ja $(1,0,1)$ kautta, taso T_2 pisteiden $(0,0,0), (0,0,2)$ ja $(0,3,0)$ kautta. Tasojen leikkaussuoran etäisyys origosta määrättävä.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 14.6.2006

1. Olkoot $\mathbf{x} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$ ja $\mathbf{y} = [8\ \ 2\ \ 2\ \ 0]^T$ $\mathbb{R}^4$:n vektoreita.
   (a) Määritä $\mathbf{x}$:n ja $\mathbf{y}$:n välinen kulma θ.
   (b) Määritä vektorin $\mathbf{x}$ kohtisuora projektio $\mathbf{p}$ vektorille $\mathbf{y}$ (siis $\mathbf{y}$:n virittämään aliavaruuteen $W = \mathrm{span}(\mathbf{y})$, jolloin $\mathbf{p} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{x})$).
   (c) Osoita, että vektorit $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ ja $\mathbf{p}$ ovat ortogonaaliset.
   (d) Laske $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{p}\|$ ja $\|\mathbf{x}\|$, ja totea, että "Pythagoraan lause" pätee.

2. Olkoot $P = (1, -2, 3)$, $Q = (-3, 1, 4)$ ja $R = (0, 4, 3)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä.
   (a) Määritä kolmion PQR pinta-ala.
   (b) Määritä vektoreiden $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ ja $\overrightarrow{OR}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus (O on origo).

3. Erään terästehtaan vuosittaiset myynnit vuosina 1997–2002 olivat seuraavat:

Vuosi	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Myynti (M€)	1,2	2,3	3,2	3,6	3,8	5,1

   (a) Esitä data pistejoukkona (x, y)-koordinaatistossa, jossa x-akselilla on vuodet $1997, \ldots, 2002$ korvattuina luvuilla $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja y-akselilla on vuosittainen myynti.
   (b) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
   (c) Ennusta vuoden 2006 myynti.

4. Määritä matriisi P, joka diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrisen matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

ja laske $P^T AP$.

5. Olkoon $L\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus

$$L(p(x)) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{bmatrix}.$$

Määritä $\mathrm{Ker}(L)$ ja osoita, että L on isomorfismi. Onko L isomorfismi $P_3 \to \mathbb{R}^3$?

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 9.8.2006

1. Olkoot $\mathbf{v}_1 = [1\ \ 2\ \ -2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [4\ \ 3\ \ 2]^T$ ja $\mathbf{v}_3 = [1\ \ 2\ \ 1]^T$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita.
   (a) Osoita, että jono $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ on vapaa, jolloin S on $\mathbb{R}^3$:n kanta.
   (b) Määritä $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S.

2. Olkoon $D\colon P_2 \to P_1$ lineaarikuvaus $D(p(x)) = p'(x)$, "derivaattaoperaattori".
   (a) Määritä $\mathrm{Im}(D)$ ja $\mathrm{Ker}(D)$.
   (b) Määritä D:n matriisi P_2:n kannan $S = (x^2, x, 1)$ ja P_1:n kannan $S' = (x, 1)$ suhteen.
   (c) Kun $p(x) = -x^2 + 3x - 2 \in P_2$, niin määritä $D(p(x))$:n koordinaatit kannan S' suhteen.

3. Olkoon $V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
   (a) Osoita, että $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.
   (b) Mitkä ehdot lukujen x_1, x_2, x_3 tulee täyttää, jotta V on säännöllinen?

4. Laske A^{99}, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Olkoot
$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$
   2×2 -matriiseja, ja asetetaan
$$\langle U, V\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4.$$
   (a) Osoita, että $\langle U, V\rangle$ on sisätulo $\mathbb{R}^{2\times 2}$:ssa.
   (b) Määritä $\langle U, V\rangle$ ja $\|U - V\|$, kun $U = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ja $V = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 24.10.2006

1. Olkoot $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{2}[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -1]^T, \mathbf{x}_2 = \frac{1}{6}[1 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 5]^T \in \mathbb{R}^4$.
   (a) Osoita, että jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on ortonormaali.
   (b) Täydennä jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ avaruuden $\mathbb{R}^4$ ortonormaaliksi kannaksi etsimällä ortonormaali kanta matriisin
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$
   nolla-avaruudelle.

2. Olkoon $L \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
   (a) Osoita, että L on lineaarikuvaus.
   (b) Määritä $\mathrm{Im}(L)$.
   (c) Määritä $\mathrm{Ker}(L)$.

3. Sovita toisen asteen polynomifunktio $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ pistejoukkoon

x	0	1	2	3
y	3	2	4	4

   pienimmän neliösumman menetelmällä.

4. Piirrä käyrä $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$, kun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

5. Olkoot $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että
   $$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 13.12.2006

1. Olkoot $P = (1, -1, 1)$, $Q = (2, 3, -1)$, $R = (0, 4, 1)$ ja $S = (-1, 0, 2)$. Määritä tetraedrin $PQRS$ tilavuus.

2. Seuraavassa taulukossa on esitetty eräällä matematiikan kurssilla ajan t (viikkoa) kuluessa kurssille ilmoittautuneista opiskelijoista kurssin keskeyttäneiden opiskelijoiden lukumäärä y.

t viikkoa	0	1	3	6
y keskeyttänyttä	2	3	7	12

   (a) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
   (b) Kurssi kestää 13 viikkoa. Ennusta kurssin keskeyttäneiden lukumäärä.

3. Olkoon $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus

$$A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

sekä

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Määritä lineaarikuvauksen A matriisi $M(A; S' \leftarrow S)$ kantojen $S = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ ja $S' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ suhteen.

4. Diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrinen matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix},$$

eli määritä matriisi P, joka diagonalisoi ortogonaalisesti matriisin A, ja laske $P^T AP$.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe (korvaava) 19.12.2006

Koeaika on 1 tunti 55 minuuttia.

1. Määritä $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon
$$([1\ \ 1\ \ -1]^T, [1\ \ 0\ \ 2]^T, [2\ \ -2\ \ 3]^T).$$

2. Etsi yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisut, kun
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Olkoon $\mathbf{v} = [v_1\ \ v_2\ \ v_3]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Osoita, että ristitulokuvaus $L_\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$L_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$
on lineaarinen. Määritä lisäksi lineaarikuvauksen $L_\mathbf{v}$ matriisi $A_\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, jolla $L_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = A_\mathbf{v}\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

4. Tutki, onko matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
diagonalisoituva. Jos näin on, määritä matriisi P, joka diagonalisoi A:n, ja laske $P^{-1}AP$.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 25.1.2007

1. Olkoon V avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus, jonka virittää jono
$$S = ([1\ \ -2\ \ 0\ \ 1]^T, [-1\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^T, [1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T).$$
   (a) Määritä V:n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S.
   (b) Määritä V:n kohtisuora komplementti $V^\perp$ avaruudessa $\mathbb{R}^4$.
   (c) Täydennä ortonormaali jono S_0 avaruuden $\mathbb{R}^4$ ortonormaaliksi kannaksi.

2. Olkoon $\mathbf{v} = [v_1\ v_2\ v_3]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
   (a) Osoita, että ristitulokuvaus $L_\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$L_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$
   on lineaarinen.
   (b) Määritä lineaarikuvauksen $L_\mathbf{v}$ matriisi $A_\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, jolla $L_\mathbf{v}(\mathbf{x}) = A_\mathbf{v}\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ja osoita, että matriisi $A_\mathbf{v}$ on antisymmetrinen.
   (c) Osoita, että $\mathrm{Ker}(L_\mathbf{v}) = \mathrm{span}(\mathbf{v})$.

3. Olkoon annettu pistejoukko

x	-1	0	1	2
y	0	1	3	9

   (a) Sovita annettuun pistejoukkoon suora $y = a_0 + a_1x$ pienimmän neliösumman menetelmällä.
   (b) Sovita annettuun pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$ pienimmän neliösumman menetelmällä.
   (c) Piirrä kuva, johon hahmottelet kohdissa (a) ja (b) määritettyjen funktioiden kuvaajat. Piirrä kuvaan myös annetut y:n todelliset arvot pisteissä -1, 0, 1 ja 2. Vertaile funktioiden antamia ennusteita y:n todellisiin arvoihin.

4. Piirrä käyrä $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$, kun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

5. Laske A^{11}, kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe
12.4.2007

1. Diagonisoiko matriisi P matriisiin A, kun
a) $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

2. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -7 & 9 & -5 \\ -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

3. Olkoon $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alakolmiomatriisi.
a) Osoita, että A on säännöllinen, jos ja vain jos kaikki A:n lävistäjäalkiot ovat nollasta poikkeavia.
b) Määritä käänteismatriisin A^{-1} lävistäjäalkiot, kun A on säännöllinen.

4. Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja siihen liittyvä neliömuoto $q(x) = x^T Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, ovat *positiivisesti definiittejä*, jos $q(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $n \neq 0$. Osoita, että symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos kaikki A:n ominaiarvot ovat positiivisia.

5. Piirrä käyrä $3x^2 + 3xy + 3y^2 - 8 = 0$, kun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe
14.6.2007

1. Määritä matriisin A ominaisarvot, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Osoita, että $m \times m$ ortogonaalisten matriisien joukko on ryhmä matrisiitulon suhteen s.o.

$$Q_1 Q_2 \text{ ja } Q_1^{-1}$$

ovat ortogonaalisia, kun Q_1 ja Q_2 ovat ortogonaalisia.

3. Olkoon P_3 kolmannen asteen reaalisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Määritä jokin P_3:n kanta ja lisäksi jokin ortonormaali kanta. Vihje: Gram–Schmidt.

4. Määritä kuvajokon $L(T)$ tilavuus, kun L on lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

ja

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\}.$$

5. Piirrä käyrä

$$x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 1 = 0.$$