

1. Olkoon $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ missä } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Tutki, onko L isomorfismi.
(b) Määritä $\text{Ker}(L)$ ja $\text{Im}(L)$.

2. Olkoot $P = (2, 2, 0)$, $Q = (0, 4, 1)$ ja $R = (-1, 2, 3)$ avaruuden \mathbb{R}^3 pisteitä.

- (a) Määritä vektoreiden \overrightarrow{PQ} ja \overrightarrow{PR} virittämän suunnikkaan pinta-ala.
(b) Määritä tetraedrin $OPQR$ tilavuus (O on origo).

3. Myyntitietojen mukaan erään kaupan vuosittainen myynti riippuu myyjien lukumäärästä seuraavasti:

Myyjien lukumäärä	5	6	7	8	9	10
Vuosittainen myynti (M€)	2,3	3,2	4,1	5,0	6,1	7,2

- (a) Esitä data pistejoukkona (x, y) -koordinaatistossa, jossa x -akselilla on myyjien lukumäärä ja y -akselilla on vuosittainen myynti.
(b) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
(c) Ennusta 14 myyjällä saavutettava vuosittainen myynti.

4. Diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrinen matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

eli määritä matriisi P , joka diagonalisoi ortogonaalisesti matriisin A , ja laske $P^T A P$.

Vastaa kurssikyselyyn

<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/>
heti tentin jälkeen!



1. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ ja $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kuvaus

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ c + 1 \end{bmatrix}, \text{ missä } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Tutki, millä vakion c arvoilla L on lineaarinen.
(b) Määritä $\text{Ker}(L)$ ja $\text{Im}(L)$ silloin, kun L on lineaarinen.
2. Olkoot $P = (1, 4, -1)$, $Q = (0, 2, 1)$ ja $R = (-1, 1, 2)$ avaruuden \mathbb{R}^3 pisteitä.
(a) Määritä kolmion PQR pinta-ala.
(b) Määritä pisteiden P , Q ja R paikkavektoreiden virittämän suuntaissärmiön tilavuus.
3. Olkoon \mathbb{R}^3 :n kanta

$$S = ([1 \ 1 \ 1]^T, [-1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 2 \ 1]^T).$$

- (a) Määritä \mathbb{R}^3 :n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S .
(b) Esitä kannan S vektorit ortonormaalin kannan S_0 vektoreiden lineaarikombinaatioina.
4. Laske A^{100} , kun $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Vastaa kurssikyselyyn

<http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/>
heti tentin jälkeen!



1. Todista, että vektorit $\mathbf{u}_1 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{u}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ ja $\mathbf{u}_3 = [1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ muodostavat lineaarikuvauksen $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,
$$L(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T,$$
ytimen $\text{Ker}(L)$ erään kannan. Sovella tähän ytimen $\text{Ker}(L)$ kantaan Gramin-Schmidtin menetelmää.
2. Olkoot $P = (1, 2, -1)$, $Q = (2, 3, 1)$ ja $R = (1, 2, -1)$.
 - (a) Määritä pisteiden P , Q ja R kautta kulkevan \mathbb{R}^3 :n tason T normaalimuotoinen yhtälö.
 - (b) Määritä pisteen $S = (-3, 2, -1)$ etäisyys tasosta T . Mikä tason T piste on lähimpänä pistettä S ?
 - (c) Määritä pisteen S kautta kulkevan tason T kanssa yhdensuuntaisen tason T_S normaalimuotoinen yhtälö.
3. Määritä matriisi lineaarikuvaukselle $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka kiertää ensin vektoria 45° origon ympäri vastapäivään, sitten peilaa vektorin x_2 -akselin suhteen ja viimeiseksi projisoi vektorin x_1 -akselille. Määritä L :n kuva ja ydin. Onko L injektio tai surjektio? Onko L isomorfismi? Onko kuvaus L sama riippumatta siitä, missä järjestyksessä kierto, peilaus ja projisointi suoritetaan?
4. Olkoon $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ylä- tai alakolmiomatriisi.
 - (a) Osoita, että A on säännöllinen, jos ja vain jos kaikki A :n lävistäjäalkiot ovat nollasta poikkeavia.
 - (b) Määritä kääntematriisin A^{-1} lävistäjäalkiot, kun A on säännöllinen.
5. Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja siihen liittyvä neliömuoto $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ovat *positiivisesti definiittejä*, jos $q(\mathbf{x}) > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Osoita, että symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on *positiivisesti definiitti*, jos ja vain jos kaikki A :n ominaisarvot ovat positiivisia.

1. Määrää matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisin.

2. Mitkä ovat matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot?

3. Määrää ortonormaali kanta vektoreitten $(0, 3, 0, 4)$, $(4, 0, 3, 0)$, $(4, 3, 3, 4)$ ja $(4, -3, 3, -4)$ virittämälle aliavaruudelle.

4. Lineaarikuvaus $l : R^3 \rightarrow R^3$ toteuttaa

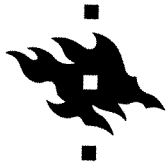
$$L(x, y, z) = (x + y, 2y + z, x + y + z).$$

Kappaleen

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2y \leq 3z \leq 6\}$$

kuvan $L(T)$ tilavuus määrättävä.

5. Avaruuden R^3 taso T_1 kulkee pisteiden $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ ja $(1, 0, 1)$ kautta, taso T_2 pisteiden $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ ja $(0, 3, 0)$ kautta. Tasojen leikkaussuoran etäisyys origosta määrättävä.



1. Olkoot $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ja $\mathbf{y} = [8 \ 2 \ 2 \ 0]^T$ \mathbb{R}^4 :n vektoreita.
- (a) Määritä \mathbf{x} :n ja \mathbf{y} :n välinen kulma θ .
 - (b) Määritä vektorin \mathbf{x} kohtisuora projektiio \mathbf{p} vektorille \mathbf{y} (siis \mathbf{y} :n virittämään aliavaruuteen $W = \text{span}(\mathbf{y})$, jolloin $\mathbf{p} = \text{proj}_W(\mathbf{x})$).
 - (c) Osoita, että vektorit $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ ja \mathbf{p} ovat ortogonaaliset.
 - (d) Laske $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$, $\|\mathbf{p}\|$ ja $\|\mathbf{x}\|$, ja totea, että "Pythagoraan lause" pätee.
2. Olkoot $P = (1, -2, 3)$, $Q = (-3, 1, 4)$ ja $R = (0, 4, 3)$ avaruuden \mathbb{R}^3 pisteitä.
- (a) Määritä kolmion PQR pinta-ala.
 - (b) Määritä vektoreiden \vec{OP} , \vec{OQ} ja \vec{OR} virittämän suuntaissärmiön tilavuus (O on origo).

3. Erään terästehtaan vuosittaiset myynnit vuosina 1997–2002 olivat seuraavat:

Vuosi	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Myynti (M€)	1,2	2,3	3,2	3,6	3,8	5,1

- (a) Esitä data pistejoukkona (x, y) -koordinaatistossa, jossa x -akselilla on vuodet 1997, ..., 2002 korvattuina luvuilla 0, 1, 2, 3, 4, 5 ja y -akselilla on vuosittainen myynti.
 - (b) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
 - (c) Ennusta vuoden 2006 myynti.
4. Määritä matriisi P , joka diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrisen matriisin

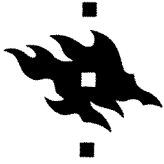
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

ja laske $P^T A P$.

5. Olkoon $L: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus

$$L(p(x)) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{bmatrix}.$$

Määritä $\text{Ker}(L)$ ja osoita, että L on isomorfismi. Onko L isomorfismi $P_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$?



1. Olkoot $\mathbf{v}_1 = [1 \ 2 \ -2]^T$, $\mathbf{v}_2 = [4 \ 3 \ 2]^T$ ja $\mathbf{v}_3 = [1 \ 2 \ 1]^T$ avaruuden \mathbb{R}^3 vektoreita.
 - (a) Osoita, että jono $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ on vapaa, jolloin S on \mathbb{R}^3 :n kanta.
 - (b) Määritä \mathbb{R}^3 :n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S .
2. Olkoon $D: P_2 \rightarrow P_1$ lineaarikuvaus $D(p(x)) = p'(x)$, ”derivaattaoperaattori”.
 - (a) Määritä $\text{Im}(D)$ ja $\text{Ker}(D)$.
 - (b) Määritä D :n matriisi P_2 :n kannan $S = (x^2, x, 1)$ ja P_1 :n kannan $S' = (x, 1)$ suhteen.
 - (c) Kun $p(x) = -x^2 + 3x - 2 \in P_2$, niin määritä $D(p(x))$:n koordinaatit kannan S' suhteen.

3. Olkoon $V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, missä $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

- (a) Osoita, että $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.
- (b) Mitkä ehdot lukujen x_1, x_2, x_3 tulee täyttää, jotta V on säännöllinen?

4. Laske A^{99} , kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

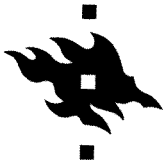
5. Olkoot

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

2×2 -matriiseja, ja asetetaan

$$\langle U, V \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4.$$

- (a) Osoita, että $\langle U, V \rangle$ on sisätulo $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:ssa.
- (b) Määritä $\langle U, V \rangle$ ja $\|U - V\|$, kun $U = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ja $V = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.



1. Olkoot $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{2}[1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{6}[1 \ 1 \ 3 \ 5]^T \in \mathbb{R}^4$.
(a) Osoita, että jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on ortonormaali.
(b) Täydennä jono $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ avaruuden \mathbb{R}^4 ortonormaaliksi kannaksi etsimällä ortonormaali kanta matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

nolla-avaruudelle.

2. Olkoon $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- (a) Osoita, että L on lineaarikuvaus.
(b) Määritä $\text{Im}(L)$.
(c) Määritä $\text{Ker}(L)$.

3. Sovita toisen asteen polynomifunktio $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ pistejoukkoon

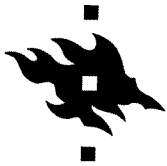
x	0	1	2	3
y	3	2	4	4

pienimmän neliösumman menetelmällä.

4. Piirrä käyrä $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$, kun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

5. Olkoot $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$



1. Olkoot $P = (1, -1, 1)$, $Q = (2, 3, -1)$, $R = (0, 4, 1)$ ja $S = (-1, 0, 2)$. Määritä tetraedrin $PQRS$ tilavuus.
2. Seuraavassa taulukossa on esitetty eräällä matematiikan kurssilla ajan t (viikkoa) kuluessa kurssille ilmoittautuneista opiskelijoista kurssin keskeyttäneiden opiskelijoiden lukumäärä y .

t viikkoa	0	1	3	6
y keskeyttänyttä	2	3	7	12

- (a) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
 - (b) Kurssi kestää 13 viikkoa. Ennusta kurssin keskeyttäneiden lukumäärä.
3. Olkoon $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus

$$A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

sekä

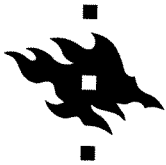
$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Määritä lineaarikuvauksen A matriisi $M(A; S' \leftarrow S)$ kantojen $S = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ ja $S' = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ suhteen.

4. Diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrinen matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix},$$

eli määritä matriisi P , joka diagonalisoi ortogonaalisesti matriisin A , ja laske $P^T A P$.



Koeaika on 1 tunti 55 minuuttia.

1. Määritä \mathbb{R}^3 :n ortonormaali kanta soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon

$$([1 \ 1 \ -1]^T, [1 \ 0 \ 2]^T, [2 \ -2 \ 3]^T).$$

2. Etsi yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisut, kun

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Olkoon $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Osoita, että ristitulokuvaus $L_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$

on lineaarinen. Määritä lisäksi lineaarikuvauksen $L_{\mathbf{v}}$ matriisi $A_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, jolla $L_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

4. Tutki, onko matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonalisoituva. Jos näin on, määritä matriisi P , joka diagonalisoi A :n, ja laske $P^{-1}AP$.

Vastaa kurssikyselyyn <http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/> heti tentin jälkeen!



1. Olkoon V avaruuden \mathbb{R}^4 aliavaruus, jonka virittää jono

$$S = ([1 \ -2 \ 0 \ 1]^T, [-1 \ 0 \ 0 \ -1]^T, [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T).$$

- (a) Määritä V :n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S .
(b) Määritä V :n kohtisuora komplementti V^\perp avaruudessa \mathbb{R}^4 .
(c) Täydennä ortonormaali jono S_0 avaruuden \mathbb{R}^4 ortonormaaliksi kannaksi.
2. Olkoon $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
(a) Osoita, että ristitulokuvaus $L_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3,$$

on lineaarinen.

- (b) Määritä lineaarikuvauksen $L_{\mathbf{v}}$ matriisi $A_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, jolla $L_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ja osoita, että matriisi $A_{\mathbf{v}}$ on antisymmetrinen.
(c) Osoita, että $\text{Ker}(L_{\mathbf{v}}) = \text{span}(\mathbf{v})$.

3. Olkoon annettu pistejoukko

x	-1	0	1	2
y	0	1	3	9

- (a) Sovita annettuun pistejoukkoon suora $y = a_0 + a_1x$ pienimmän neliösumman menetelmällä.
(b) Sovita annettuun pistejoukkoon toisen asteen polynomifunktio $y = b_0 + b_1x + b_2x^2$ pienimmän neliösumman menetelmällä.
(c) Piirrä kuva, johon hahmottelet kohdissa (a) ja (b) määritettyjen funktioiden kuvaajat. Piirrä kuvaan myös annetut y :n todelliset arvot pisteissä -1, 0, 1 ja 2. Vertaile funktioiden antamia ennusteita y :n todellisiin arvoihin.
4. Piirrä käyrä $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$, kun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

5. Laske A^{11} , kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Diagonisoiko matriisi P matriisiin A , kun

a) $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$?

2. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -7 & 9 & -5 \\ -7 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

3. Olkoon $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alakolmiomatriisi.

a) Osoita, että A on säännöllinen, jos ja vain jos kaikki A :n lävistäjääalkiot ovat nollasta poikkeavia.

b) Määritä käänteismatriisin A^{-1} lävistäjääalkiot, kun A on säännöllinen.

4. Symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja siihen liittyvä neliömuoto $q(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$, ovat *positiivisesti definiittejä*, jos $q(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $n \neq 0$. Osoita, että symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on *positiivisesti definiitti*, jos ja vain jos kaikki A :n ominaisarvot ovat positiivisia.

5. Piirrä käyrä $3x^2 + 3xy + 3y^2 - 8 = 0$, kun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Määritä matriisin A ominaisarvot, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Osoita, että $m \times m$ ortogonaalisten matriisien joukko on ryhmä matriisiitulon suhteen s.o.

$$Q_1 Q_2 \text{ ja } Q_1^{-1}$$

ovat ortogonaalisia, kun Q_1 ja Q_2 ovat ortogonaalisia.

3. Olkoon P_3 kolmannen asteen reaalisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Määritä jokin P_3 :n kanta ja lisäksi jokin ortonormaali kanta. Vihje: Gram–Schmidt.

4. Määritä kuvajokon $L(T)$ tilavuus, kun L on lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

ja

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\}.$$

5. Piirrä käyrä

$$x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 1 = 0.$$