Opettajalinjan työpaja I
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Kurssikoe 14.10.2008

Kokeessa ei saa käyttää laskinta! Taulukkokirja ja kokeen mukana tuleva teorialappu ovat sallittuja.

Kirjoita jokaiseen palauttamaasi vastauspaperiin kurssin nimi ja päivämäärä oman nimesi ja opiskelijanumerosi (tai sosiaaliturvatunnuksesi) lisäksi. Ainakin yksi nimellä (ja muilla tiedoilla) varustettu vastauspaperi on palautettava.

1. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Laske matriisin A käänteismatriisi mikäli mahdollista.

b) Laske matriisitulo ABC.

2. a) Kuuluuko vektori $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -7 \end{bmatrix}^T$ vektorien $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T$ ja $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ virittämään $\mathbb{R}^3$:n aliavaruuteen?

b) Muodostaako polynomien jono $(3x-1, 2x+1, 4x^2-3)$ vektoriavaruuden P_2 kannan?

3. Millä vakioiden a ja b arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+y+az &= b \\ \phantom{x+{}}y+z &= 2 \end{cases}$$

on a) tasan yksi ratkaisu, b) ääretön määrä ratkaisuja, c) ei yhtään ratkaisua?

4. a) Todista, että joukko

$$T = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \mid x_2 - 2x_3 = 0\}$$

on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

b) Onko joukko

$$\{f \in P_3 \mid f\text{:llä on ainakin yksi reaalinen juuri}\}$$

avaruuden P_3 aliavaruus? (P_3 = korkeintaan astetta 3 olevien polynomien joukko.)

Lause 1 *Olkoot* $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *ja* $t \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$(a)\ (A^T)^T = A,\ (b)\ (A + A')^T = A^T + A'^T,\ (c)\ (AB)^T = B^T A^T,\ (d)\ (tA)^T = tA^T.$$

- Neliömatriisi B on neliömatriisin A **käänteismatriisi**, jos $AB = I = BA$. Merkitään $B = A^{-1}$.

Lause 2 *Jos* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ovat säännöllisiä, niin myös* A^{-1}, AB *ja* A^T *ovat säännöllisiä ja*

$$(a)\ (A^{-1})^{-1} = A.\quad (b)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.\quad (c)\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

- Matriisi A on **symmetrinen**, jos $A^T = A$.
- Matriisi A on **antisymmetrinen**, jos $A^T = -A$.
- $m \times m$-matriisi E on **alkeismatriisi**, jos se saadaan yhdellä alkeisrivitoimituksella yksikkömatriisista I_m.

Määritelmä 3 *Joukko* V *on* ($\mathbb{R}$-*kertoiminen*) ***vektoriavaruus***, *jos kaikkiin* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *ja* $a \in \mathbb{R}$ *on liitetty yksikäsitteinen summa* $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$ *ja tulo* $a\mathbf{v} \in V$ *niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:*

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
2. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
3. On olemassa sellainen $\mathbf{0}_V \in V$, että $\mathbf{v} + \mathbf{0}_V = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$.
4. Jokaiseen $\mathbf{v} \in V$ liittyy sellainen $-\mathbf{v} \in V$, että $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}_V$.
5. $a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.
6. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$.
7. $a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V$.
8. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$.

Määritelmä 4 *Olkoon* V *vektoriavaruus.* V*:n osajoukko* W *on* V*:n* ***(vektori)aliavaruus***, *jos* V*:n laskutoimitukset ovat suljettuja* W*:n suhteen ja* W *(varustettuna* V*:n laskutoimituksilla) on vektoriavaruus.*

Lause 5 *(Aliavaruuskriteeri) Vektoriavaruuden* V *osajoukko* W *on aliavaruus, jos* W *toteuttaa seuraavat kolme ehtoa:*

1. $W \neq \emptyset$,
2. *Jos* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, *niin* $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$.
3. *Jos* $a \in \mathbb{R}$ *ja* $\mathbf{w} \in W$, *niin* $a\mathbf{w} \in W$.

- Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w} \in V$. Vektori $\mathbf{w}$ on vektorien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ **lineaarikombinaatio**, jos on olemassa reaaliluvut $a_1, \ldots, a_k$, joilla $\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k$.
- Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Merkitään
$$\mathbf{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \{a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$
- Jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektoriavaruuden V vektoreita on **vapaa**, jos mitään vektoreista $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ei voida antaa toisten jonon vektorien lineaarikombinaationa.

Lause 6 *Jono* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *vektoriavaruuden* V *vektoreita on vapaa, jos yhtälön* $x_1\mathbf{v}_1 + \ldots x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}_V$ *ainoa ratkaisu on* $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

- Jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektoriavaruuden V vektoreita **virittää** V:n, jos $span(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = V$.
- Jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektoriavaruuden V vektoreita on V:n **kanta**, jos jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa ja virittää V:n.
- Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisin A **nolla-avaruus** $Null(A)$ on joukko $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.
- Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisin A **sarakeavaruus** $Col(A)$ on joukko $span(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, missä $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ovat A:n sarakkeet.
- Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriisin A **riviavaruus** $Row(A)$ on joukko $span(\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m)$, missä $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ ovat A:n rivit.

Lause 7 *Jos* $m \times n$*-matriisit* A *ja* B *ovat riviekvivalentit, niin*

$$(a)\ Null(A) = Null(B)\quad ja\quad (b)\ Row(A) = Row(B).$$

Lause 8 *Jos vektoriavaruudella* V *on kannat* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *ja* $(\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_l)$, *niin* $k = l$; *siis jokaisessa* V*:n kannassa on yhtä monta vektoria.*

- Jos $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on vektoriavaruuden V kanta, niin V:n **dimensio** on n, merkitään $\dim V = n$.
- Matriisin **aste** on $rank(A) = \dim Col(A) = \dim Row(A)$.
- Vektoriavaruus V on **äärellisulotteinen**, jos V on äärellisen monen vektorinsa virittämä, ts $V = span(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ joillakin $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$.