Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe
9.8.2007

1. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi.

2. Olkoot A ja B säännöllisiä matriiseja. Osoita, että A^{-1} ja AB ovat myös säännöllisiä. Entä onko $A + B$ välttämättä myös säännöllinen?

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

nolla–avaruuden kanta sekä matriisin A aste.

4. Olkoot $v_1, \ldots, v_k$ lineaarisesti riippuvia vektoreita vektoriavaruudessa V. Osoita, että

$$\dim \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k) < k.$$

5. Olkoon $\{e_1, \ldots, e_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta. Osoita, että $\{f_1, \ldots, f_n\}$ on $\mathbb{R}^n$:n kanta kun

$$f_i = e_1 + e_2 + \ldots + e_j; \quad j = 1, \ldots, n.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 4.3.2008

1. Osoita, että 3×3-matriisi

$$A = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ei ole säännöllinen millään lukujen α, β ja γ arvoilla.

2. Tutki, virittääkö jono
   (a) $(1, x^2, x^2 - 2)$,
   (b) $(x + 2, x + 1, x^2 - 1)$,
   (c) $(x + 2, x^2 - 1)$
   korkeintaan toisen asteen polynomifunktioiden avaruuden P_2.

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksien kannat sekä matriisin aste.

4. Jos massa m asetetaan jousen päähän ja massaa vedetään ensin alaspäin ja sitten vapautetaan, niin massa–jousi -systeemi alkaa värähdellä. Massan poikkeama y lepoasemasta ajan t suhteen saadaan funktiosta

$$(*) \qquad y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t,$$

missä ω on jousesta ja massasta riippuva vakio. Osoita, että muotoa $(*)$, missä ω on kiinnitetty ja c_1, c_2 ovat mielivaltaisia, olevien funktioiden joukko on vektoriavaruus.

5. Olkoot A ja B symmetrisiä $n \times n$-matriiseja.
   (a) Onko AB tällöin välttämättä symmetrinen? Perustele vastauksesi.
   (b) Osoita, että $AB = BA$ jos ja vain jos AB on symmetrinen.

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I

Loppukoe 13.5.2008

1. Olkoon
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
missä $a \in \mathbb{R}$. Olkoon myös $\lambda \in \mathbb{R}$. Määritä kaikki mahdolliset vakioiden a ja λ arvot joilla yhtälöllä
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$$
on olemassa ratkaisu $X = (x_1, x_2, x_3)^t$. **Vihje**: Tutki ensin tapaus, jossa matriisi A on säännöllinen.

2. Tutki virittävätkö jonot
   (a) $(1, x+1, (x+1)^2)$,
   (b) $(x, x^2-1, (x+1)^2)$,
   (c) $(x+1, x^2-1)$,

   korkeintaan toisen asteen polynomifunktioiden avaruuden P_2.

3. Määritä matriisin
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
rivi–, sarake– ja nolla–avaruuksien kannat sekä matriisin aste.

4. Olkoon P_2 korkeintaan astetta kaksi olevien polynomifunktioiden muodostama vektoriavaruus. Varustetaan se kannalla $\mathbf{e} = (1, x, x^2)$. Tarkastellaan kuvausta (derivaattakuvaus)
$$d : P_2 \to P_2, \quad p \mapsto p',$$
missä p' on polynomin p derivaatta. Määrää kuvauksen d matriisi kannan $\mathbf{e}$ suhteen. Onko d injektio? Entäs surjektio?

5. Oletetaan, että A ja B ovat $n \times n$–neliömatriiseja, jotka kommutoivat, eli $AB = BA$. Osoita, että jos AB on säännöllinen, niin myös A ja B ovat.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Erilliskoe 12.6.2008

1. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$$

2. Osoita, että matriisi A on säännöllinen ja määritä A^{-1}, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Olkoon X reaalilukuparien (p_1, p_2) joukko varustettuna yhteenlaskulla

$$(p_1, p_2) + (q_1, q_2) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2)$$

ja skalaarikertolaskulla

$$c(p_1, p_2) = (cp_1, 0).$$

Tutki, onko X vektoriavaruus.

4. Olkoon $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 2 \quad -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [3 \quad 7 \quad 1]^T$ ja $\mathbf{v}_3 = [2 \quad 3 \quad 4]^T$. Pidetään tunnettuna, että $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ on $\mathbb{R}^3$:n kanta. Olkoon lisäksi E $\mathbb{R}^3$:n luonnollinen kanta. Muodosta kannanvaihtomatriisi $M(S \leftarrow E)$. Mitkä ovat vektorin $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$ koordinaatit kannassa S?

5. Olkoon W vektorien $[1 \quad 1 \quad 2]^T$, $[2 \quad 5 \quad 5]^T$ ja $[3 \quad -9 \quad 2]^T$ virittämä $\mathbb{R}^3$:n aliavaruus. Etsi W:lle jokin kanta, ja täydennä löytämäsi W:n kanta $\mathbb{R}^3$:n kannaksi (so. etsi $\mathbb{R}^3$:n kanta, joka sisältää W:n kantavektorit).

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Erilliskoe 14.8.2008

1. Määritä tasojen $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ ja $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$ leikkaussuoran parametriesitys.

2. Millä vakion a arvoilla yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} -x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = a \\ 2x_1 - 3x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

on (a) yksikäsitteinen ratkaisu, (b) äärettömän monta ratkaisua, (c) ei yhtään ratkaisua?

3. Muodosta seuraavien $\mathbb{R}^3$:n osajoukkojen virittämät aliavaruudet:

(a) $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 1 \text{ ja } x_3 = 2\}$,

(b) $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2 \text{ ja } x_3 = 0\}$.

4. Olkoot A ja B säännöllisiä $(n \times n)$-matriiseita, joille myös matriisi $A+B$ on säännöllinen. Osoita, että $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

5. Totea, että vektorit $u_1 = (-2, 1, 0, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 3, 2)$ ja $u_4 = (4, 3, 2, 1)$ muodostavat $\mathbb{R}^4$:n kannan. Mitkä näistä vektoreista voidaan korvata vektorilla $v = (-1, -1, 1, 1)$ niin, että saatava vektorijono on edelleen $\mathbb{R}^4$:n kanta?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Kurssikoe 15.10.2008
Laatijat: Petteri Harjulehto ja Hans-Olav Tylli

1.

(a) Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriiseja. Onko yhtälö $AB = BA$ voimassa?

(b) Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

2.

(a) Määrittele käsite säännöllinen matriisi.

(b) Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

käänteismatriisi.

3. Olkoot V vektoriavaruus ja $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ sen vapaa jono. Määritellään $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$, $\bar{w}_2 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ ja $\bar{w}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 - \bar{v}_3$. Onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa vektoriavaruudessa V?

4. Onko jono

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta ?

Huom. Muista perustella vastauksesi!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 12.11.2008

1. Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}.$$

2. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksien kannat sekä matriisin aste.

3. Olkoon P_n korkeintaan n-asteisten polynomifunktioiden $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama avaruus, $n \in \mathbb{N}$. Tutki, virittävätkö polynomit
   (a) $x^2 + 1$, $x^2 - 1$ ja $x^2 + x + 1$ avaruuden P_2,
   (b) $x^3 - 1$, $x^2 + 1$, $x - 1$ ja 1 avaruuden P_3,
   (c) x^3, $x^2 + 1$, $x^2 - x$ ja $x + 1$ avaruuden P_3.

4. Olkoot $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Osoita, että $S = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
   (b) Määritä kannanvaihtomatriisit $M(E \leftarrow S)$ ja $M(S \leftarrow E)$, missä E on avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta.
   (c) Määritä vektorin $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ koordinaattivektori kannan S suhteen.
   (d) Määritä vektori $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaattivektori kannan S suhteen on $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

5. (a) Olkoot $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, niin A on singulaarinen.
   (b) Anna esimerkki matriisista $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, joka ei ole nollamatriisi, ja vektoreista $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, joilla $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 3.3.2009
Laatijat: Petteri Harjulehto

1. Olkoot
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$
avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriiseja. Onko yhtälö $AB = BA$ voimassa?

2. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä
$$\begin{cases} \phantom{2x_1 +{}} 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ \phantom{2x_1 + 2x_2 +{}} 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 \phantom{{}+ 2x_2} - 6x_3 + 9x_4 = 7 \end{cases}$$
Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

3. Määrittele käsite säännöllinen matriisi. Määritä matriisin
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
käänteismatriisi.

4. Olkoot V vektoriavaruus ja $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ sen vapaa jono. Määritellään $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$, $\bar{w}_2 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ ja $\bar{w}_3 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 - \bar{v}_3$. Onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa vektoriavaruudessa V?

5. Määrittele käsite kanta. Anna esimerkki
(a) avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannasta, johon kuuluu vektori $[1, 1, 1]^T$;
(b) vapaasta vektorijonosta, joka ei ole avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

Huom. Muista perustella vastauksesi!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 12.5.2009
Laatijat: Petteri Harjulehto

1. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Määritä A^T, $B - 2A$ ja AB. Onko voimassa $AB = BA$?

2. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} & & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & & & - & 6x_3 & + & 9x_4 & = & 7 \end{cases}$$

Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

3. Määrittele käsite säännöllinen matriisi. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

käänteismatriisi.

4. Olkoot $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ vapaa jono avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen, niin jona $(A\bar{v}_1, \dots, \bar{A}v_n)$ on vapaa.

5. Millä vakion a arvoilla, jono

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \right)$$

muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan?

Huom. Muista perustella vastauksesi!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 11.6.2009
Laatijat: Petteri Harjulehto

1. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriiseja. Määritä A^T, $B - 3A$ ja AB. Onko yhtälö $AB = BA$ voimassa?

2. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminoinnilla.

3. Määrittele käsite säännöllinen matriisi. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/10 \\ 1/5 & -4/5 & 1/10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

käänteismatriisi.

4. Todista seuraa väite: $(\overline{v}, \overline{w})$ on sidottu jos ja vain jos $\overline{v} = a\overline{w}$ jollakin $a \in \mathbb{R}$ tai $\overline{w} = b\overline{v}$ jollakin $b \in \mathbb{R}$.

5. Määrittele käsite kanta. Anna esimerkki
(a) avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannasta, johon kuuluu vektori $[1, 1, 1]^T$;
(b) vapaasta vektorijonosta, joka ei ole avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

Huom. Muista perustella vastauksesi!