Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta soveltajille
Loppukoe
20.1.2005

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Laske $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ kaikilla $n = 2, 3, 4, \cdots$.

2. Millä reaaliluvun a arvoilla yhtälöryhmällä
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -4x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
on epätriviaali ratkaisu?

3. Sijaitseeko $\mathbb{R}^4$:n vektori $(1, 0, -1, 0)$ vektorien $u_1 = (1, 2, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 3, 5, 2)$ ja $u_3 = (1, 5, 5, 3)$ virittämässä $\mathbb{R}^4$:n aliavaruudessa?

4. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
Etsi kaikki 3×2–matriisit B, joille $AB = I_2$. Onko olemassa sellaista 3×2–matriisia C, että $CA = I_3$?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta soveltajille (3 ov)
Loppukoe
14.4.2005

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Määrää käänteismatriisi A^{-1}, mikäli sellainen on olemassa.

3. Olkoon $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,2,0)$ ja $w = (0,0,1,1)$ kolme R^4:n vektoria. Määrää luku a siten, että vektori

$$x = (1,1,5,a)$$

kuuluu vektorien u, v ja w virittämän aliavaruuteen.

4. Osoita, että

$$w = \{(x,y,z) \in R^3 : x + 2y = 0 \text{ ja } y + 2z = 0\}$$

on R^3:n aliavaruus. Määrää w:lle jokin kanta.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Kurssikoe 19.10.2005

1. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$
Gaussin–Jordanin eliminointimenetelmällä.

2. Tutki, onko vektori $\mathbf{b} = [4 \ -1 \ 8]^T \in \mathbb{R}^3$ vektoreiden $\mathbf{a}_1 = [1 \ 2 \ -1]^T \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{a}_2 = [6 \ 4 \ 2]^T \in \mathbb{R}^3$ lineaarikombinaatio.

3. Määritä matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$
rivi- ja sarakeavaruuksien kannat sekä matriisin A aste.

4. (a) Olkoot $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Osoita, että jos A on säännöllinen ja $AB = AC$, niin $B = C$.
   (b) Kun $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ja $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, niin mitä havaitset matriisituloista AB ja AC? Miksi havaintosi ei ole ristiriidassa kohdan (a) tuloksen kanssa, vaikka $B \neq C$?

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Kurssikoe (korvaava) 26.10.2005

1. Tutki, onko matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$
säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritä A^{-1}.

2. Tutki, ovatko $\mathbb{R}^3$:n vektorit
$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
lineaarisesti riippumattomia.

3. Määritä matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$
nolla-avaruuden kanta sekä matriisin A aste.

4. (a) Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Osoita, että jos $AB = BA$, niin
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$
   (b) Anna esimerkki 2×2 -matriiseista A ja B, joilla
$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 16.11.2005

1. Tutki, onko matriisi

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritä käänteismatriisi.

2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$.
   (a) Osoita, että
   $$A^n = \begin{bmatrix} (n+1)a^n & -na^{n+1} \\ na^{n-1} & (1-n)a^n \end{bmatrix}, \quad \text{kun } n \geqslant 1.$$
   (b) Tutki, onko olemassa sellaisia lukuja $a \neq 0$, että A^9 on symmetrinen tai antisymmetrinen.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Määritä luvut a, b ja c siten, että
   (a) $\operatorname{rank}(A) = 1$,
   (b) $\operatorname{rank}(A) = 2$.

4. Tutki seuraavista matriiseista $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, onko homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko origon kautta kulkeva suora, origon kautta kulkeva taso vai pelkkä origo.

$$\text{(a)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Jos ratkaisujoukko on suora tai taso, esitä sen parametrimuotoinen yhtälö.

5. Tarkastellaan ensimmäisen asteen polynomien joukon P_1 kantoja $S = (p_1, p_2)$ ja $T = (q_1, q_2)$, missä
   $$p_1(x) = 6 + 3x, \quad p_2(x) = 10 + 2x, \quad q_1(x) = 2 \quad \text{ja} \quad q_2(x) = 3 + 2x.$$
   (a) Määritä kannanvaihtomatriisit $M(S \leftarrow T)$ ja $M(T \leftarrow S)$.
   (b) Määritä koordinaattivektorit $[f]_S$ ja $[f]_T$, kun $f(x) = -4 + x$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 7.3.2006

1. Laske matriisitulo ABC, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Laske determinantin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

arvo.

3. Laske käänteismatriisi A^{-1}, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Laske kappaleen

$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 6\}$$

tilavuus.

5. Vektorien $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 2, -2, 0)$ ja $(2, 2, -2, 0)$ virittämälle $\mathbb{R}^4$:n aliavaruudelle etsi ortonormaali kanta.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 18.5.2006

1. Tutki, onko matriisi

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritä käänteismatriisi.

2. Olkoot $\mathbf{v}_1 = [0\ 3\ 1\ -1]^T$, $\mathbf{v}_2 = [6\ 0\ 5\ 1]^T$ ja $\mathbf{v}_3 = [4\ -7\ 1\ 3]^T$.
   (a) Osoita, että jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ on sidottu $\mathbb{R}^4$:ssä.
   (b) Esitä jokainen vektori $\mathbf{v}_i$ kahden muun vektorin lineaarikombinaationa.

3. (a) Määritä pisteiden $P = [6\ \ -1\ \ 5]^T \in \mathbb{R}^3$ ja $Q = [7\ \ 2\ \ -4]^T \in \mathbb{R}^3$ kautta kulkevan suoran ℓ parametrimuotoinen yhtälö.
   (b) Määritä piste $R \in \mathbb{R}^3$, jossa ℓ leikkaa x_2x_3-tason $\{[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$.
   (c) Määritä origon O ja pisteiden P ja Q kautta kulkevan tason T parametrimuotoinen yhtälö.

4. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksien kannat sekä matriisin aste.

5. Tutki, onko
   (a) kaikkien sellaisten $n \times n$ -matriisien A joukko, joiden lävistäjäalkioiden summa on nolla,
   (b) kaikkien antisymmetristen $n \times n$ -matriisien B joukko

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n\times n}$ aliavaruus.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 14.6.2006

1. Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - x_4 = 1 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 4 \end{cases}.$$

2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Määritä A^n kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

3. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

(a) Osoita, että A ja B ovat toistensa käänteismatriisit.
(b) Määritä $(AB)^{-1}$.
(c) Onko A tai B symmetrinen tai antisymmetrinen?

4. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksien kannat sekä matriisin aste.

5. Osoita, että funktiojono $(2x, |x|)$ on
(a) vapaa vektoriavaruudessa $C[-1, 1]$,
(b) sidottu vektoriavaruudessa $C[0, 1]$.
Tässä $C[a, b]$, $a < b$, on kaikkien välillä $[a, b]$ määriteltyjen jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden joukko.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

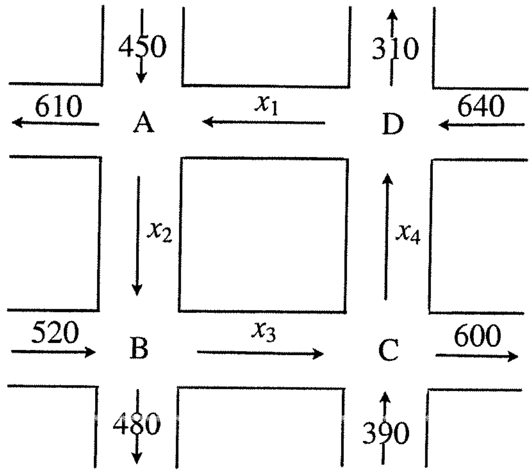
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 9.8.2006

1. Tutki, onko matriisi

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritä käänteismatriisi.

2. Eräässä kaupungissa neljä yksisuuntaista katua risteää viereisessä kuvassa esitetyllä tavalla. Kuvaan on merkitty ruuhka-aikana risteyksiin A, B, C ja D risteysalueen ulkopuolelta saapuvat ja niistä lähtevät keskimääräiset liikennemäärät tunnissa. Määritä risteysten väliset keskimääräiset liikennemäärät x_1, x_2, x_3 ja x_4.



3. Tutki, onko jono
   (a) $([1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ 1]^T, [1\ 0\ 1]^T)$ lineaarisesti riippumaton $\mathbb{R}^3$:ssa,
   (b) $([1\ -1\ 2\ 3]^T, [-2\ 3\ 1\ -2]^T, [1\ 0\ 7\ 7]^T)$ lineaarisesti riippumaton $\mathbb{R}^4$:ssa.

4. Olkoot $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Osoita, että $S = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.
   (b) Määritä kannanvaihtomatriisit $M(E \leftarrow S)$ ja $M(S \leftarrow E)$, missä E on avaruuden $\mathbb{R}^2$ luonnollinen kanta.
   (c) Määritä vektorin $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ koordinaattivektori kannan S suhteen.
   (d) Määritä vektori $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaattivektori kannan S suhteen on $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

5. (a) Olkoot $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, niin A on singulaarinen.
   (b) Anna esimerkki matriisista $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, joka ei ole nollamatriisi, ja vektoreista $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, joilla $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Kurssikoe 18.10.2006

1. Tutki, onko matriisi

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritä matriisin käänteismatriisi.

2. Olkoot $\mathbf{a}_1 = [1\ 2\ 3]^T, \mathbf{a}_2 = [-2\ 1\ 0]^T, \mathbf{a}_3 = [1\ 0\ 1]^T \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että jono $S = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta.

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

nolla-avaruuden kanta sekä matriisin A aste.

4. Matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

pätee $A^2 = \mathbf{0}$. Onko mahdollista, että symmetriselle matriisille $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, missä $B \neq \mathbf{0}$, pätee sama ominaisuus, eli $B^2 = \mathbf{0}$? Todista vastauksesi.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 16.11.2006

1. Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät

$$\text{(a)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä.

2. Tutki, onko joukko
   (a) $A = \{[x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}$,
   (b) $B = \{[x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$,
   (c) $C = \{[x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2\}$,
   (d) $D = \{[x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 \text{ tai } x_3 = x_2\}$,
   avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksien kannat sekä matriisin A aste.

4. Olkoot $S = (1, x, x^2)$ ja $T = (1, 2x, 4x^2 - 2)$ kaksi avaruuden P_2 kantaa.
   (a) Määritä kannanvaihtomatriisi $M(S \leftarrow T)$.
   (b) Määritä kannanvaihtomatriisi $M(T \leftarrow S)$.
   (c) Määritä $[p(x)]_T$, kun $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$.

5. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Osoita, että jos sekä B että AB ovat säännöllisiä, niin myös A on säännöllinen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe
6.3.2007

1. Laske matriisitulo ABC, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Määritä A^{-1}, B^{-1} ja $(AB)^{-1}$.

3. Osoita, että

$$w = \{(x, y, z) \in R^3 : x + 2y = 0 \quad \text{ja} \quad y - z = 0\}$$

on R^3:n aliavaruus, Määrää w:lle jokin kanta.

4. Olkoon $u = (1, 0, 1, 0)$, $v = (0, 1, 2, 0)$ ja $w = (0, 0, 1, 1)$ kolme R^4:n vektoria. Määrää luku a siten, että vektori

$$x = (1, 1, 5, a)$$

kuuluu vektorien u, v ja w virittämään aliavaruuteen.

5. Tutki, onko
(a) kaikkien sellaisten $n \times n$–matriisien A joukko, joiden lävistäjäalkioiden summa on nolla,
(b) kaikkien antisymmetristen $n \times n$–matriisien B joukko
vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n \times n}$ aliavaruus.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe 15.5.2007

1. Tutki, ovatko matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R},$$

säännöllisiä, ja myönteisessä tapauksessa määritä käänteismatriisi.

2. Olkoon P_n korkeintaan n-asteisten polynomifunktioiden $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama avaruus, $n \in \mathbb{N}$. Tutki, virittävätkö polynomit
   (a) $x^2 + 1$, $x^2 - 1$ ja $x^2 + x + 1$ avaruuden P_2,
   (b) $x^3 - 1$, $x^2 + 1$, $x - 1$ ja 1 avaruuden P_3,
   (c) x^3, $x^2 + 1$, $x^2 - x$ ja $x + 1$ avaruuden P_3.

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

rivi-, sarake- ja nolla-avaruuksien kannat sekä matriisin A aste.

4. Tutki seuraavista matriiseista $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, onko homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko origon kautta kulkeva suora, origon kautta kulkeva taso vai pelkkä origo.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 11 \end{bmatrix}, \quad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Jos ratkaisujoukko on suora tai taso, esitä sen parametrimuotoinen yhtälö.

5. Matriisi $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on matriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(reaalinen) neliöjuuri*, jos $S^2 = A$.
   (a) Osoita, että $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ on matriisin $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ neliöjuuri. Onko A:lla muita neliöjuuria?
   (b) Selitä, miksi vain neliömatriiseilla voi olla neliöjuuri.
   (c) Määritä 2×2-ykkösmatriisin $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ kaikki (reaaliset) neliöjuuret.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Loppukoe
14.6.2007

1. Määritä, ovatko matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

kääntyviä.

2. Olkoot a ja b reaalilukuja ja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että

$$A + A^{-1} = 2I.$$

3. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

nolla–avaruden kanta sekä matriisin A aste.

4. Etsi vektorien $(0,1,1,1)$, $(1,2,-2,0)$ ja $(2,2,-2,0)$ virittämälle $\mathbb{R}^n$ aliavaruudelle ortonormaali kanta.

5. Oletetaan, että vektorit v_1, v_2 ja v_3 ovat lineaarisesti riippumattomia $\mathbb{R}^m$:n vektoreita. Osoita, että w_1, w_2 ja w_3 ovat myös lineaarisesti riippumattomia, kun $w_1 = v_1$, $w_2 = v_1 + v_2$ ja $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$.