Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe
9.8.2007

1. Määritä matriisin A ominaisarvot, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Osoita, että $m \times m$ ortogonaalisten matriisien joukko on ryhmä matrisiitulon suhteen s.o.

$$Q_1 Q_2 \text{ ja } Q_1^{-1}$$

ovat ortogonaalisia, kun Q_1 ja Q_2 ovat ortogonaalisia.

3. Olkoon P_3 kolmannen asteen reaalisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Määritä jokin P_3:n kanta ja lisäksi jokin ortonormaali kanta. Vihje: Gram–Schmidt.

4. Määritä kuvajokon $L(T)$ tilavuus, kun L on lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

ja

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1\}.$$

5. Piirrä käyrä

$$x^2 + 4xy - y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 1 = 0.$$

OPETTAJALINJAN TYÖPAJA I, syksy 2007
LINEAARIALGEBRA JA MATRIISILASKENTA II
Kurssikoe
12.12.2007

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva?

2. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ taso T kulkee pisteen $(2, 1, -1)$ kautta ja sisältää suoran
$$l = \{\bar{p} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{p} = (1, 0, 0) + t(-1, 1, 1) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}.$$
Määritä tason T yhtälö (muodossa $ax + by + cz + d = 0$). Onko taso T avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?

3. Olkoon $\bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $W = \operatorname{span}(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \subset \mathbb{R}^5$.

   a) Määritä aliavaruudelle W ortonormaali kanta.

   b) Määritä vektorin $\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W.

4. Olkoon $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ ja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ehdon
$$T(\bar{x}) = (\bar{a} \cdot \bar{x})\bar{b}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$
määrittelemä kuvaus. Osoita lineaarisuuden määritelmän nojalla, että T on lineaarinen, ja määritä kuvauksen T matriisi standardikantojen suhteen. Voiko kuvaus T olla isomorfismi? Tarkka perustelu!

Kokeen tulokset ovat valmiina viimeistään pe 21.12.2007. Laitan malliratkaisut ja tiedon tulosten valmistumisesta kurssin kotisivulle.

HYVÄÄ JOULUA JA ONNELLISTA UUTTAVUOTTA KAIKILLE PAJALAISILLE! KIITOKSET KULUNEESTA MUKAVASTA SYKSYSTÄ JA MENESTYSTÄ TULEVILLE OPINNOILLENNE!
T:Eija

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 12.12.2007

1. Osoita, että $\mathbb{R}^3$:n projektio x_1x_2-tasoon eli kuvaus $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$L(\mathbf{x}) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$
on lineaarinen. Määritä lisäksi $\mathrm{Ker}(L)$ ja $\mathrm{Im}(L)$.

2. Etsi yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisut, kun
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Olkoon $\mathbb{R}^2$ varustettu sisätulolla $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$.
   (a) Tutki, ovatko vektorit $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortogonaaliset sisätulon $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ suhteen.
   (b) Määritä sisätulon $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ suhteen ortonormaali $\mathbb{R}^2$:n kanta soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

4. Tutki, onko matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
ortogonaalisesti diagonalisoituva. Jos näin on, määritä matriisi P, joka diagonalisoi ortogonaalisesti matriisin A, ja laske P^TAP.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 24.1.2008

1. Olkoot $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Määritä k siten, että
   (a) $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat yhdensuuntaiset,
   (b) $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat ortogonaaliset,
   (c) $\mathbf{x}$:n ja $\mathbf{y}$:n välinen kulma on $\frac{\pi}{3}$.
   Piirrä kuva jokaisesta tapauksesta (a), (b) ja (c).

2. Olkoon V avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus, jonka kanta on jono
$$S = ([1\ 0\ 1\ 0]^T, [1\ 1\ 3\ 0]^T, [1\ 2\ 0\ 0]^T).$$
   (a) Määritä V:n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S.
   (b) Määritä V:n kohtisuora komplementti $V^\perp$ avaruudessa $\mathbb{R}^4$.
   (c) Täydennä ortonormaali jono S_0 avaruuden $\mathbb{R}^4$ ortonormaaliksi kannaksi.

3. Tutki, onko lineaarikuvaus $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, injektio tai surjektio, kun
$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Laske A^{11}, kun $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$.

5. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tutkitaan lineaarikuvauksia $L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ja $L_{A^2}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A^2\mathbf{x}$.
   (a) Osoita, että $\mathrm{Im}(L_{A^2}) \subset \mathrm{Im}(L_A)$.
   (b) Määritä $\mathrm{Ker}(L_{A^2})$, kun $\mathrm{Ker}(L_A) = \{\mathbf{0}\}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Loppukoe 3.4.2008

1. Määritä $\mathbb{R}^3$:n
   (a) pisteen $(2, -1, 3)$ kautta kulkevan tason T normaalimuotoinen yhtälö siten, että vektori $[2\ \ 3\ \ 4]^T \in \mathbb{R}^3$ on T:n normaali,
   (b) pisteen $(-1, 2, 1)$ etäisyys tasosta T.

2. Erään terästehtaan vuosittaiset myynnit vuosina 1997–2002 olivat seuraavat:

Vuosi	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Myynti (M€)	1,2	2,3	3,2	3,6	3,8	5,1

   (a) Esitä data pistejoukkona (x, y)-koordinaatistossa, jossa x-akselilla on vuodet $1997, \ldots, 2002$ korvattuina luvuilla $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ja y-akselilla on vuosittainen myynti.
   (b) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
   (c) Ennusta vuoden 2008 myynti.

3. (a) Osoita, että
$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)q(x_i), \text{ missä } x_1 = -1,\ x_2 = 0 \text{ ja } x_3 = 1,\ p, q \in P_2,$$
   määrittelee sisätulon P_2:ssa.
   (b) Määritä P_2:n ortonormaali kanta S_0 sisätulon $\langle p, q \rangle$ suhteen soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää P_2:n kantaan $S = (1, x, x^2)$.

4. Määritä neliömuodon
$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_2x_3, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$
   pääakseliesitys.

5. Ei-negatiivisten reaalilukujen x ja y *geometrinen keskiarvo* on $\sqrt{xy}$ ja *aritmeettinen keskiarvo* on $\dfrac{x+y}{2}$. Osoita, että
$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$
   kaikilla $x, y \in \mathbb{R}_+$. *Vihje*: Tutki vektoreita $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{x} \\ \sqrt{y} \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \sqrt{y} \\ \sqrt{x} \end{bmatrix}$, ja käytä Schwarzin epäyhtälöä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Erilliskoe 12.6.2008

1. Osoita, että matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ei ole minkään (2×2)-matriisin neliö.

2. Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ se taso, jonka suhteen pisteet $(5, 2, 7)$ ja $(-1, -2, -5)$ ovat toistensa peilikuvat (ts. sijaitsevat symmetrisesti T:n suhteen). Etsi T:n yhtälö, ja määritä pisteen $(4, 6, 5)$ etäisyys tasosta T.

3. Määritellään lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ asettamalla $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pidetään tunnettuna, että $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ on $\mathbb{R}^3$:n kanta, kun $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, $\mathbf{v}_2 = [1 \quad 0 \quad 1]^T$ ja $\mathbf{v}_3 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$. Muodosta matriisi $M(L; S \leftarrow S)$ ja määritä ytimen $\mathrm{Ker}(L)$ sekä kuva-avaruuden $\mathrm{Im}(L)$ dimensiot.

4. Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & a \\ 1 & 1 & b^2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

kun $a, b, c \in \mathbb{R}$, ja määritä, millä vakioiden a, b, c arvoilla se on nolla.

5. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Määritä $A^7 = AAAAAAA$ diagonalisoimalla ensin A.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Erilliskoe 14.8.2008

1. Määritellään lineaarikuvaus $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ asettamalla

$$Lx = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3) \quad \text{kaikilla } x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Määritä L:n ydin $\mathrm{Ker}(L)$ ja kuva-avaruus $\mathrm{Im}(L)$. Onko L injektio? Onko L surjektio?

2. Olkoon L tehtävän 1 lineaarikuvaus. Oletetaan tunnetuksi, että $\overline{E} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ on $\mathbb{R}^3$:n kanta, kun $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 1)$ ja $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Muodosta L:n matriisi kannassa $\overline{E}$.

3. Laske determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

4. Täydennä vektorien $u_1 = (2, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, -2, -2, 1)$ ja $u_3 = (0, 0, 1, 2)$ muodostama jono $\mathbb{R}^4$:n ortogonaaliseksi eli kohtisuoraksi kannaksi.

5. Määritä $(n \times n)$-matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Erilliskoe 21.10.2008

1. Muodosta jokin ortogonaalinen matriisi, jonka ensimmäinen sarake on $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$.

2. Määritä lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3 + 3x_4, x_1 + 2x_3 + x_4, 2x_1 + 2x_2 - 4x_4, 3x_1 + 3x_2 + 3x_3),$$

ydin $\mathrm{Ker}(L)$ ja aste eli kuva-avaruuden dimensio $\mathrm{rank}(L)$.

3. Olkoot S ja T avaruuden $\mathbb{R}^2$ kantoja ja $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, joille

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad M(L; E \leftarrow E) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Määritä $M(L; T \leftarrow S)$.

4. Olkoot $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$ kolme $\mathbb{R}^3$:n pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Osoita, että näiden pisteiden kautta kulkevan tason v yhtälö voidaan esittää muodossa

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eli} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. (a) Etsi lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $M(L; E_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, ominaisarvot, ja muodosta sisätuloavaruudelle $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta, joka koostuu L:n ominaisvektoreista.
(b) Anna kaikki $\mathbb{R}^3$:n 1-ulotteiset aliavaruudet U, jotka L kuvaa niihin itseensä eli joille pätee $L(U) \subset U$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 10.12.2008

1. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja niihin liittyvät ominaisavaruudet.

2. Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisut. Onko yhtälöryhmällä *ratkaisuja*, eli onko olemassa sellaisia reaalilukuja x_1 ja x_2, jotka toteuttavat yhtälöryhmän?

3. Olkoon $\mathbb{R}^2$ varustettu sisätulolla $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.
   (a) Tutki, ovatko vektorit $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortogonaaliset sisätulon $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ suhteen.
   (b) Määritä sisätulon $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ suhteen ortonormaali $\mathbb{R}^2$:n kanta soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

4. (a) Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Osoita, että jos $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ja $L(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$, missä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ja $\mathbf{b} \in W$, niin $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(L)$.
   (b) Olkoot $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ja $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kaavan $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ määrittelemä lineaarikuvaus. Jos $L_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, niin onko mahdollista, että myös $L_A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$?

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Erilliskoe 2.4.2009

1. Olkoon V avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus, jonka kanta on
$$S = ([1\ 1\ 1\ 1]^T, [2\ 1\ 0\ 1]^T, [1\ 1\ 2\ 1]^T).$$
   (a) Määritä V:n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S.
   (b) Täydennä ortonormaali jono S_0 avaruuden $\mathbb{R}^4$ ortonormaaliksi kannaksi.

2. (a) Olkoot V ja V' vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to V'$ lineaarikuvaus. Esitä L:n *kuvan* ja *ytimen* määritelmät.
   (b) Olkoon $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ kuvaus
$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ z+w \end{bmatrix}.$$
   Määritä L:n kuva ja ydin. Onko L isomorfismi?

3. Seuraavassa taulukossa on esitetty mittaustulokset ilmakehän saasteiden määrästä y_i (erään yleisesti käytetyn standardin mukaisella yksiköllä) puolen tunnin t_i välein eräänä ajanjaksona.

t_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_i	−0,15	0,24	0,68	1,04	1,21	1,15	0,86	0,41	−0,08

   (a) Esitä data pistejoukkona (t, y)-koordinaatistossa.
   (b) Määritä pistejoukkoon sovitettu toisen asteen polynomifunktio $y(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ pienimmän neliösumman menetelmällä.

4. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Onko A ortogonaalisesti diagonalisoituva? Perustele.
   (b) Onko A diagonalisoituva? Perustele.
   (c) Jos vastasit kohdan (a) tai (b) kysymykseen myöntävästi, niin määritä matriisi P, joka diagonalisoi matriisin A (ortogonaalisesti mikäli mahdollista), ja laske $P^{-1}AP$.

5. (a) Olkoot V sisätuloavaruus ja $W \subset V$ aliavaruus. Esitä määritelmä W:n *kohtisuoralle komplementille* V:ssä.
   (b) Olkoot $\mathbf{u}_1 = [1\ 1\ -1\ 4]^T, \mathbf{u}_2 = [1\ -1\ 1\ 2]^T \in \mathbb{R}^4$ ja $W = \mathrm{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Määritä kanta W:n kohtisuoralle komplementille $\mathbb{R}^4$:ssä.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Erilliskoe 11.6.2009

1. Olkoon V avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus, jonka virittää jono
$$S = ([1\ \ -2\ \ 0\ \ 1]^T, [-1\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^T, [1\ \ 1\ \ 0\ \ 0]^T).$$
   (a) Määritä V:n ortonormaali kanta S_0 soveltamalla Gramin–Schmidtin menetelmää jonoon S.
   (b) Määritä V:n kohtisuora komplementti $V^\perp$ avaruudessa $\mathbb{R}^4$.

2. Olkoot $P = (1, 2, -1)$, $Q = (2, 3, 1)$ ja $R = (3, -1, 2)$.
   (a) Määritä pisteiden P, Q ja R kautta kulkevan $\mathbb{R}^3$:n tason T normaalimuotoinen yhtälö.
   (b) Määritä pisteen $S = (-3, 2, -1)$ etäisyys tasosta T. Mikä tason T piste on lähimpänä pistettä S?

3. Tehdas valmistaa tuotetta, jonka erään komponentin liian suuri massa valmiissa tuotteessa aiheuttaa tuotteen hylkäämisen. Kyseisen komponentin massa muuttuu valmistusprosessin aikana. Koska valmiin tuotteen hylkääminen aiheuttaa tehtaalle ylimääräisiä kuluja, komponentin massan ennakoiminen mahdollisimman varhaisessa vaiheessa on tehtaalle hyödyllistä. Seuraavassa taulukossa on viiden esimerkkipunnituksen perusteella todetut komponentin massat x_i asennusvaiheessa ja vastaavat massat y_i valmiissa tuotteessa.

x_i (kg)	2,60	2,72	2,75	2,67	2,68
y_i (kg)	2,00	2,10	2,10	2,03	2,04

   (a) Esitä data pistejoukkona (x, y)-koordinaatistossa, jossa x-akselilla on massat x_i ja y-akselilla on massat y_i.
   (b) Määritä pistejoukkoon sovitettu pienimmän neliösumman suora.
   (c) Ennusta komponentin massa valmiissa tuotteessa, kun sen massa asennusvaiheessa on 2,65 kg.

4. Määritä matriisi P, joka diagonalisoi ortogonaalisesti symmetrisen matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$
ja laske P^TAP.

5. Olkoon $L\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus
$$L(p(x)) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(2) \\ p(3) \end{bmatrix}.$$
Määritä $\mathrm{Ker}(L)$ ja osoita, että L on isomorfismi. Onko L isomorfismi $P_3 \to \mathbb{R}^3$?