HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Loppukoe, 14. 6. 2006

1. Olkoot S, T ja U vektoriavaruuden V aliavaruuksia, joille $U \subset S$. Todista *modulaarisääntö*

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U.$$

2. Olkoon V ääretönulotteinen avaruus. Todista, että avaruudella V on aito aliavaruus U, joka on isomorfinen avaruuden V kanssa.

3. Tarkastellaan reaalisten polynomifunktioiden vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Olkoon $A\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$Ax(t) = x(2t).$$

Osoita, että A on lineaarinen ja määritä sen spektri $\sigma(A)$.

4. Esitä esimerkki epätriviaalista modulista M, jonka duaali M^* on triviaali eli $M^* = \{\overline{0}\}$.

5. Olkoot V ja Z saman kerroinkunnan vektoriavaruuksia ja $u \in V \otimes Z$. Osoita, että tensorin u voi esittää muodossa

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \otimes z_i,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja jonot $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ja $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ ovat vapaita. [Vihje: Kannattaa valita tensorin u yo. esitys niin, että n on pienin mahdollinen.]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Erilliskoe 19.12.2007

1. Osoita, että on olemassa sellainen funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että $f(x+y) = f(x)+f(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja että f ei ole muotoa $x \mapsto ax$ millään $a \in \mathbb{R}$.

2. Olkoon V vektoriavaruus sellaisen kunnan K suhteen, jossa $2 = 1 + 1 \neq 0$. Olkoon $S \in L(V)$ lineaarikuvaus, joka on involuutio eli jolle pätee $S^2 = I$. Osoita, että

$$V = \{x \in V \mid Sx = x\} \oplus \{x \in V \mid Sx = -x\}.$$

3. Olkoon $\mathcal{P}$ reaalipolynomien $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus ja $A\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ehdon $(Ax)(t) = x(0)t^2$, kun $x \in \mathcal{P}$ ja $t \in \mathbb{R}$, määrittelemä lineaarikuvaus. Määritä kuvauksen A spektri $\sigma(A)$.

4. Olkoon R ykkösellinen kommutatiivinen rengas, M ja N R-moduleja ja $A \in L(M, N)$. Todista yhtälö

$$(\operatorname{Im} A)^\circ = \operatorname{Ker} {}^tA$$

lineaarikuvauksen A kuvan ortogonaalille ja transpoosin ytimelle.

5. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-vektoriavaruutta $V = \mathbb{R}^3$. Konstruoi sellainen tensori $u \in V^* \otimes V$, jonka aste on 2. Käyttämällä sitten vektoriavaruuksien $V^* \otimes V$, $L(V)$ ja $M_3(\mathbb{R})$ luonnollista isomorfisuutta esitä myös saamaasi tensoria u vastaava matriisi.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Loppukoe, 3. 4. 2008

1. Olkoot $n, p \in \mathbb{N}$, missä p on alkuluku. Kuinka monta kaksiulotteista aliavaruutta on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruudella $(\mathbb{Z}_p)^n$?

2. a) Määrittele, mitä tarkoitetaan vektoriavaruuden S aliavaruuden U komplementilla. b) Onko mahdollista, että $U \neq \{\bar{0}\}$ on vektoriavaruuden S aliavaruus, V ja W aliavaruuden U komplementteja ja $S = \text{span}(V \cup W)$?

3. Olkoon V K-vektoriavaruus, missä kerroinkunta $(K, +, \cdot)$ on ääretön. Todista, että V ei ole äärellisen monen aidon aliavaruutensa yhdiste.

4. Merkitään $T = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ ja $V = \mathbb{C}^T = \{\, f \mid f\colon T \to \mathbb{C} \,\}$. Tällöin V on luonnollisella tavalla kompleksinen vektoriavaruus. Asetetaan

$$A\colon V \to V,\ (Af)(z) = zf(z).$$

Määritä lineaarisen operaattorin A spektri $\sigma(A)$.

5. Olkoot V ja Z saman kerroinkunnan vektoriavaruuksia ja $u \in V \otimes Z$. Osoita, että tensorin u voi esittää muodossa

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \otimes z_i,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja jonot $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ja $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ ovat vapaita.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Loppukoe, 14. 8. 2008

1. Kuinka monta aliavaruutta on $\mathbb{Z}_5$-vektoriavaruudella $(\mathbb{Z}_5)^3$?

2. Tarkastellaan reaalista vektoriavaruutta $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Onko joukko $S = \{\sin, \cos, \exp\}$ vapaa? (exp on luonnollisesti eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.) Onko S vektoriavaruuden V virittäjäjoukko?

3. Olkoon M moduli, S sen alimoduli sekä T ja U alimodulin S komplementteja. Todista, että T ja U ovat isomorfiset.

4. Tarkastellaan reaalista vektoriavaruutta $V = F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ja kuvausta $A\colon V \to V$,

$$A((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{n+2})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Määritä lineaarikuvauksen A ominaisarvot.

5. Olkoot U ja V äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia, joille $\dim(U) > 2$ ja $\dim(V) > 2$. Osoita, että $U \times V \ncong U \otimes V$.