Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
20.4.2004

1. Määriteltävä modulin suorat tekijät ja etsittävä kaikki $\mathbb{Z}$–modulin $\mathbb{Q}$ suorat tekijät.

2. Olkoon A rengas ja E oikeanpuoleinen A–moduli, jolla on kanta $(e_i)_{1 \le i \le n}$. Olkoon $P = (a_{ij}) \in M_n(A)$ ja $e'_i = \sum_{j=1}^{n} e_j a_{ji}$ $(1 \le i \le n)$. Osoitettava, että $(e'_i)_{1 \le i \le n}$ on E:n kanta, jos ja vain jos matriisi P on kääntyvä.

3. Olkoon A rengas, E A–moduli ja E^{**} sen biduaali. Määriteltävä kanoninen homomorfismi $c_E : E \to E^{**}$ ja osoitettava se injektiiviseksi, kun E on vapaa.

4. Olkoon A vaihdannainen rengas ja olkoot E, F kaksi A–modulia. Määriteltävä kanoninen homomorfismi
$$\theta : E^* \otimes_A F \to \mathrm{Hom}_A(E, F)$$
ja osoitettava se bijektiiviseksi, kun E on äärellistyyppinen ja vapaa.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
10.8.2004

1. Määriteltävä modulin suorat tekijät ja etsittävä kaikki $\mathbb{Z}$–modulin $\mathbb{Q}$ suorat tekijät.

2. Olkoon A rengas ja E oikeanpuoleinen A–moduli, jolla on kanta $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. Olkoon $P = (a_{ij}) \in M_n(A)$ ja $e_i' = \sum_{j=1}^n e_j a_{ji}$ $(1 \leq i \leq n)$. Osoitettava, että $(e_i')_{1\leq i\leq n}$ on E:n kanta, jos ja vain jos matriisi P on kääntyvä.

3. Olkoon A rengas, E A–moduli ja E^{**} sen biduaali. Määriteltävä kanoninen homomorfismi $c_E : E \to E^{**}$ ja osoitettava se injektiiviseksi, kun E on vapaa.

4. Olkoon A vaihdannainen rengas ja olkoot E, F kaksi A–modulia. Määriteltävä kanoninen homomorfismi
$$\theta : E^* \otimes_A F \to \mathrm{Hom}_A(E, F)$$
ja osoitettava se bijektiiviseksi, kun E on äärellistyyppinen ja vapaa.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Lineaarialgebra II

20.1.2005

1. Olkoot E, F äärellisdimensionaalisia vektoriavaruuksia yli kunnan k. Muodosta vektoriavaruusisomorfismi ulkoisen algebran $\Lambda(E \oplus F)$ ja algebran $\Lambda(E) \otimes \Lambda(F)$ välille.

2. Moduli E on *projektiivinen* jos on olemassa vapaa moduli F ja sen alimoduli E' siten, että $F = E \oplus E'$. Osoita, että projektiivisten modulien tensoritulot ja suorat summat ovat projektiivisia.

3. Olkoon A vaihdannainen rengas ja olkoot M, N A-moduleita. Muodosta kanoninen homomorfismi

$$\mu : M^* \otimes_A N^* \to (M \otimes_A N)^*.$$

4. Olkoon A rengas, E A-moduli ja $e : E \to E$ projektiokuvaus. Osoita, että E on alimodulien $M = e(E)$ ja $N = e^{-1}(0)$ suora summa.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Lineaarialgebra II

14.4. 2005

1. Olkoon K kunta ja $n > 0$ kokonaisluku. Osoitettava, että matriisirengas $A = M_n(K)$ on vasemmanpuoleisena A–modulina puoliyksinkertainen.

2. Olkoot E, F äärellisdimensionaalisia vektoriavaruuksia yli kunnan k. Muodosta vektoriavaruusisomorfismi ulkoisen algebran $\Lambda(E \oplus F)$ ja algebran $\Lambda(E) \otimes \Lambda(F)$ välille.

3. Moduli E on *projektiivinen* jos on olemassa vapaa moduli F ja sen alimoduli E' siten, että $F = E \oplus E'$. Osoita, että projektiivisten modulien tensoritulot ja suorat summat ovat projektiivisia.

4. Olkoon A vaihdannainen rengas ja olkoot M, N A-moduleita. Muodosta kanoninen homomorfismi

$$\mu : M^* \otimes_A N^* \to (M \otimes_A N)^*.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Lineaarialgebra II
Loppukoe, 20. 12. 2005

1. Kuinka monta aliavaruutta on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruudella $(\mathbb{Z}_p)^3$?

2. Olkoon S vektoriavaruus ja U, V ja W sen aliavaruuksia. Onko mahdollista, että U on V:n komplementti, V on W:n komplementti ja W on U:n komplementti?

3. Tarkastellaan reaalisten polynomifunktioiden reaalista vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Osoita, että kuvaus $A\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$A(x)(t) = \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u$$

on lineaarinen. Määritä lineaarikuvauksen A pistespektri $P\sigma(A)$ ja spektri $\sigma(A)$.

4. Olkoon $s = F(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{\, x \mid x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\}$. Todista, että on olemassa lineaarinen muoto $a^*\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jolle

$$a^*(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n),$$

kun jonolla x on äärellinen kantaja.

5. Olkoot V ja Z saman kerroinkunnan vektoriavaruuksia ja $u \in V \otimes Z$. Osoita, että tensorin u voi esittää muodossa

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \otimes z_i,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja jonot $(v_0, \dots, v_{n-1})$ ja $(z_0, \dots, z_{n-1})$ ovat vapaita.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Loppukoe, 3. 4. 2006

1. Esitä esimerkki modulista, jolla ei ole kantaa eli vapaata virittäjäjoukkoa.

2. Olkoot $n, p \in \mathbb{N}$, missä p on alkuluku. Kuinka monta kaksiulotteista aliavaruutta on $\mathbb{Z}_p$-vektoriavaruudella $(\mathbb{Z}_p)^n$?

3. Olkoon V vektoriavaruus ja U sen aliavaruus. Todista luentojen tulos, että U:lla on komplementti.

4. Tarkastellaan reaalisten polynomifunktioiden reaalista vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Osoita, että kuvaus $A\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$A(x)(t) = \int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$$

on lineaarinen. Määritä lineaarikuvauksen A pistespektri $P\sigma(A)$ ja spektri $\sigma(A)$.

5. Esitä esimerkein, että epätriviaalien vektoriavaruuksien karteesinen tulo voi olla isomorfinen tai epäisomorfinen niiden tensoritulon kanssa. Toisin sanoen: On olemassa saman kerroinkunnan epätriviaalit vektoriavaruudet U, V, W ja Z, joille $U \times V \cong U \otimes V$ ja $W \times Z \ncong W \otimes Z$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Loppukoe, 14. 6. 2006

1. Olkoot S, T ja U vektoriavaruuden V aliavaruuksia, joille $U \subset S$. Todista *modulaarisääntö*

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + U.$$

2. Olkoon V ääretönulotteinen avaruus. Todista, että avaruudella V on aito aliavaruus U, joka on isomorfinen avaruuden V kanssa.

3. Tarkastellaan reaalisten polynomifunktioiden vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Olkoon $A: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$Ax(t) = x(2t).$$

Osoita, että A on lineaarinen ja määritä sen spektri $\sigma(A)$.

4. Esitä esimerkki epätriviaalista modulista M, jonka duaali M^* on triviaali eli $M^* = \{\overline{0}\}$.

5. Olkoot V ja Z saman kerroinkunnan vektoriavaruuksia ja $u \in V \otimes Z$. Osoita, että tensorin u voi esittää muodossa

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} v_i \otimes z_i,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja jonot $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ ja $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ ovat vapaita. [Vihje: Kannattaa valita tensorin u yo. esitys niin, että n on pienin mahdollinen.]

1. Esitä esimerkki sellaisista Abelin ryhmästä $(M, +)$ ja ykkösellisestä vähintään kaksialkioisesta renkaasta $(R, +, \cdot)$, että M:ää ei voi varustaa skalaarikerronnalla niin, että siitä muodostuisi R-moduli.

2. Tarkastellaan reaalista vektoriavaruutta $V = F\big(]-\pi/2, \pi/2[, \mathbb{R}\big)$. Onko joukko $S = \{\sin, \cos, \tan\}$ vapaa? Onko S vektoriavaruuden V virittäjäjoukko?

3. Olkoon M moduli, S sen alimoduli sekä T ja U alimodulin S komplementteja. Todista, että T ja U ovat isomorfiset.

4. Tarkastellaan reaalista vektoriavaruutta $V = F(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ja kuvausta $A\colon V \to V$,

$$A((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_{-n})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Määritä lineaarikuvauksen A spektri $\sigma(A)$.

5. Olkoot U ja Z vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Näytä, että aliavaruuksien ortogonaaleille pätee

$$(U \cap Z)^\circ = U^\circ + Z^\circ.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Loppukoe, 20. 12. 2006

1. Olkoon $U = (\mathbb{Z}_7)^3$ ja $V = (\mathbb{Z}_7)^5$. Kuinka monta lineaarista injektiota $A: U \to V$ on olemassa? Entä kuinka monta lineaarista injektiota $B: V \to U$?

2. Esitä esimerkki modulista M moduli ja sen alimoduli L, jolla ei ole komplementtia.

3. Tarkastellaan avaruuden $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{\, x: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \text{ jatkuva} \,\}$ aliavaruuksia

$$U = \{\, x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid x(0) = 0 \,\} \text{ ja } Z = \{\, x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^1 x(t)\, dt = 0 \,\}.$$

Osoita, että $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U + Z$. Onko ko. summa suora?

4. Tarkastellaan reaalisten polynomifunktioiden reaalista vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Osoita, että kuvaus $A: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$A(x)(t) = \int_0^t u x(u)\, \mathrm{d}u$$

on lineaarinen. Määritä lineaarikuvauksen A pistespektri $P\sigma(A)$.

5. Olkoot U ja V äärellisulotteisia K-vektoriavaruuksia, joille $\dim(U) > 2$ ja $\dim(V) > 2$. Osoita, että $U \times V \ncong U \otimes V$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra II
Erilliskoe, 12.4.2007

1. Osoita, että $\mathbb{Z}$-modulissa $\mathbb{Q}$ jokainen vähintään kaksi alkiota sisältävä osajoukko on sidottu. Onko tällainen mahdollista vektoriavaruudessa, joka ei ole äärellisesti viritetty?

2. Pidetään tunnettuna, että kaikkien $\mathbb{R}$-keroimisten polynomien muodostaman $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ osajoukot $U = \{x \in \mathcal{P} \mid x(0) = x''(0) = 0\}$ ja $Z = \{x \in \mathcal{P} \mid tx''(t) - x'(t) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}\}$ ovat $\mathcal{P}$:n vektorialiavaruuksia; tässä x' ja x'' tarkoittavat polynomin x ensimmäistä ja toista derivaattaa. Etsi U:lle ja Z:lle jotkin kannat. Onko $\mathcal{P} = U \oplus Z$?

3. Tarkastellaan $\mathbb{R}$-kertoimista vektoriavaruutta $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ja lineaarista operaattoria
$$A : V \to V, \qquad A(x)(t) = x\left(\frac{t}{1+|t|}\right);$$
A:n lineaarisuutta ei tarvitse todistaa. Määritä $\mathrm{Ker}(A)$ ja $\mathrm{Im}(A)$. Onko A injektio tai surjektio?

4. Tarkastellaan lineaarista operaattoria $B : V \to V$, $B(x)(t) = tx(t)$, missä $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kuten edellisessä tehtävässä. Etsi B:n ominaisarvot ja määritä V:n aliavaruus
$$\bigoplus_{\lambda \in P\sigma(B)} V_\lambda,$$
missä V_λ on ominaisarvoa λ vastaava B:n ominaisavaruus.

5. Osoita, että funktio $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(s,t) = e^{st}$, ei kuulu tensorituloon $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \otimes_{\mathrm{f}} F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.