Matematiikan laitos
Laskettavuuden teoria

Loppukoe 25.5.2003/Huuskonen

1. Osoita suoraan määritelmän nojalla, että rajoitettu vähennyslasku on primitiivirekursiivinen.

2. Mitkä seuraavista predikaateista ovat ratkeavia, mitkä osittain ratkeavia? Lyhyet perustelut.

   a) "W_x on ääretön",

   b) "$2x \in W_x$",

   c) "$\exists z(x^3 + y^3 = z^8)$",

   d) "$42 \in E_x$".

3. Osoita, että on olemassa yksinkertainen joukko.

4. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totaali laskettava. Osoita, että on olemassa sellainen indeksi $e \in \mathbb{N}$, että $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$.

5. Osoita, että m-asteet muodostavat ylöspäisen puolihilan, ts. että kahdella m-asteella on aina pienin yläraja. (Pidetään tunnettuna, että $\leq_{\mathrm{m}}$ on osittainjärjestys.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Laskettavuuden teoria

Loppukoe 21.3.2005/Huuskonen

1. Osoita suoraan määritelmän nojalla, että seuraava funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{jos } n \text{ parillinen,} \\ 2, & \text{jos } n \text{ pariton.} \end{cases}$$

2. Mitkä seuraavista predikaateista ovat ratkeavia, mitkä osittain ratkeavia? Lyhyet perustelut.

   a) "$W_x \subseteq E_x$",

   b) "$x \in E_x$",

   c) "$x \notin E_x$",

   d) "$P_x(y)$ pysähtyy x askeleessa".

3. Ackermannin funktio $A : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} A(0, n) &= n + 1, \\ A(m + 1, 0) &= A(m, 1), \\ A(m + 1, n + 1) &= A(m, A(m + 1, n)). \end{aligned}$$

   Osoita, että on olemassa sellainen totaali funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, että jos indekseille $e, m \in \mathbb{N}$ pätee $A(m, n) \cong \varphi_e(n)$, niin pätee myös $A(m + 1, n) \cong \varphi_{f(e)}(n)$.

4. Osoita, että Ackermannin funktio on totaali. (Voit olettaa edellisessä tehtävässä todistettavan väitteen todeksi, jos haluat.)

5. Konstruoi rekursiivisesti lueteltava joukko, joka ei ole rekursiivinen, yksinkertainen eikä luova. Voit pitää yksinkertaisen joukon olemassaoloa tunnettuna.

Matematiikan laitos
Laskettavuuden teoria

Loppukoe 24.5.2005/Huuskonen

1. Osoita, että jaollisuusrelaatio on primitiivirekursiivinen. Voit pitää tunnettuna, että rajoitettu vähennyslasku on primitiivirekursiivinen.

2. Mitkä seuraavista predikaateista ovat ratkeavia, mitkä osittain ratkeavia? Lyhyet perustelut.

   a) "W_x on äärellinen",

   b) "luvun π desimaalikehitelmässä numero 7 toistuu vähintään x kertaa peräkkäin"

   c) "$W_x \cap E_x = \emptyset$",

   d) "$x \in E_x$".

3. Osoita, että on olemassa rekursiivisesti lueteltava joukko A, joka ei ole rekursiivinen, yksinkertainen eikä luova. Voit pitää yksinkertaisen joukon olemassaoloa tunnettuna.

4. Osoita, että on olemassa sellainen indeksi e, että $W_e = E_e = \{e\}$.

5. Olkoon $f(x, \bar{z})$ totaali laskettava funktio. Osoita, että on olemassa sellainen totaali laskettava $n(\bar{z})$, että $\varphi_{f(n(\bar{z}),\bar{z})} = \varphi_{n(\bar{z})}$ kaikille $\bar{z}$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Laskettavuuden teoria

Loppukoe 18.5.2006/Huuskonen

1. Osoita suoraan määritelmän perusteella, että kertolasku on primitiivirekursiivinen.

2. Mitkä seuraavista predikaateista ovat ratkeavia, mitkä osittain ratkeavia?

   a) "$W_x \neq \emptyset$",

   b) "$E_x \subseteq W_x$",

   c) "$P_x(x) \downarrow 0$ alle x askeleessa",

   d) "φ_x on totaali".

3. Pidetään tunnettuna, että on olemassa yksinkertainen joukko, ts. rekursiivisesti lueteltava joukko, jonka komplementti ei sisällä ääretöntä rekursiivisesti lueteltavaa joukkoa. Osoita, että on olemassa joukko, joka on rekursiivisesti lueteltava mutta ei yksinkertainen eikä rekursiivinen.

4. Osoita, että ohjelmassa suoritettujen käskyjen lukumäärä on vaativuusmitta.

5. Osoita, että on olemassa sellainen laskettava funktio f, että jokaiselle totaalille laskettavalle funktiolle g on olemassa $n \in \mathrm{dom}(f)$, jolle $f(n) > g(n)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Laskettavuuden teoria

Loppukoe 20.12.2006/Huuskonen

1. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aidosti kasvava primitiivirekursiivinen funktio. Määritellään $g(n)$ olemaan pienin sellainen m, että $f(m) \geq n$. Osoita määritelmän perusteella, että g on primitiivirekursiivinen. (Vihje: $g(n+1) = g(n) + ((n+1) \dot{-} f(g(n)))$.)

2. Mitkä seuraavista predikaateista ovat ratkeavia, mitkä osittain ratkeavia? Lyhyet perustelut.

   a) "$2006 \in W_x \cap E_x$",

   b) "$2006 \notin W_x \cap E_x$",

   c) "$\varphi_x(2006) = 2006$",

   d) "E_x on ääretön".

3. Osoita, että joukko $K = \{x \mid x \in W_x\}$ on luova.

4. Osoita, että on olemassa sellainen indeksi e, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $\varphi_e(n) \cong \varphi_{e+2006}(n)$.

5. Osoita, että on olemassa sellainen totaali laskettava funktio s, että kaikille indekseille e, joilla φ_e on totaali, myös $\varphi_{s(e)}$ on totaali ja toteuttaa seuraavat yhtälöt kaikilla $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{s(e)}(0) = \varphi_e(1)$$
$$\varphi_{s(e)}(n+1) = \varphi_e(\varphi_{s(e)}(n))$$