Ratkaise seuraavista tehtävistä viisi (5).

1. Määrättävä koodin $C = \{c \in \mathbb{F}_q^n \mid c_1 + \ldots + c_n = 0\}$ duaalikoodi.

2. Olkoon $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$, missä $\alpha^2 = \alpha + 1$. Olkoon $C \subset \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ käyrä $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$. Etsittävä käyrän C kaikki $\mathbb{F}_4$-rationaaliset pisteet.

3. Tarkastellaan kuntaa k vastaavaa rationaalifunktioiden kuntaa $k(X)$. Osoitettava, että $(1, X, \ldots, X^r)$ on kaikilla $r \in \mathbb{N}$ vektoriavaruuden $\mathcal{L}(rP_\infty)$ kanta.

4. Olkoon K/k algebrallinen funktiokunta. Osoitettava, että jos W on kanoninen divisori, niin $l(W) = g$ ja $\deg W = 2g - 2$.

5. Olkoon $K = \mathbb{F}_8(C)$, missä $C \subset \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_2)$ on käyrä
$$X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0.$$
Oletetaan tunnetuksi, että tällä on 24 $\mathbb{F}_8$-rationaalista pistettä. Olkoot nämä $P_1, \ldots, P_{23}$ sekä $Q = (0 : 0 : 1)$. Merkitään $D = P_1 + \ldots + P_{23}$ ja $G = 10Q$. Määrättävä koodin $C_{\mathcal{L}}(D, G)$ dimensio ja suunniteltu minimietäisyys. Mitä voidaan tällöin sanoa sen virheenkorjauskyvystä?

6. Kahta koodia $C_1, C_2 \subset \mathbb{F}_q^n$ sanotaan ekvivalenteiksi, jos on olemassa vektori $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{F}_q \setminus \{0\})^n$ siten, että
$$C_2 = \{(a_1c_1, \ldots, a_nc_n) \mid (c_1, \ldots, c_n) \in C_1\}.$$
Olkoon K/k algebrallinen funktiokunta, $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}_K$ n eri rationaalista paikkaa, $D = P_1 + \ldots + P_n$ ja $G_1, G_2 \in \mathcal{D}_K$ sellaisia, että $\operatorname{Supp} D \cap \operatorname{Supp} G_1 = \operatorname{Supp} D \cap \operatorname{Supp} G_2 = \emptyset$. Osoitettava, että jos $G_1 \sim G_2$, niin koodit $C_{\mathcal{L}}(D, G_1)$ ja $C_{\mathcal{L}}(D, G_2)$ ovat ekvivalentteja.