Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kleinin ryhmät
Loppukoe
6.3.2007

1. Olkoon G Kleinin ryhmä jossa on äärettömän monta alkiota. Osoita, että $L(G) \neq \emptyset$.

2. Olkoon G ryhmä jonka alkiot koostuvat muotoa $z \mapsto \pm z + n$, $n \in \mathbf{Z}$, olevista alkioista. Pidetään tunnettuna että G on Kleinin ryhmä jonka epäjatkuvuusalue on $\mathbf{C}$. Kuvaile ratoja Gz kun $z \in \mathbf{C}$. Osoita, että jos $F = \{x + iy : 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$, niin $GF = \cup_{g \in G} gF = \mathbf{C}$. Kuinka monta pistettä $Gz \cap F$ sisältää? Anna vastaus luvun z funktiona.

3. Olkoon g parabolinen Möbiuskuvaus siten, että $gD = D$ kun D on Möbiuskiekko. Osoita että

$$\inf_{z \in D} d(z, g(z)) = 0$$

kun d on D:n hyperbolinen metriikka.

4. Olkoon G Fuchsin ryhmä jonka invariantti (Möbius)kiekko on $U = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Siis myös $L = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ on invariantti. Osoita, että kuvaus $Gz \mapsto G\bar{z}$ on hyvin määritelty homeomorfismi $U/G \to L/G$. Tässä siis $U/G = \{Gz : z \in U\}$ ja topologia on tekijätopologia ja vastaavasti L/G.