Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Yleistentti 11.6.2009

1. Osoita, että ryhmä $SL_n(\mathbb{F}_q)$ on ryhmän $GL_n(\mathbb{F}_q)$ normaali aliryhmä, ja että $GL_n(\mathbb{F}_q)/SL_n(\mathbb{F}_q)$ on isomorfinen multiplikatiivisen ryhmän $\mathbb{F}_q^*$ kanssa.

2. Määrittele projektiiviset avaruudet $\mathbb{P}(V)$. Osoita, että ryhmän $PGL(V)$ alkiot toimivat projektiivisen avaruuden kuvauksina, vieläpä niin, että eri alkiot vastaavat eri kuvauksia.

3. Tarkastellaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ antisymmetrisiä muotoja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että ryhmät $Sp_n^{(A)}(\mathbb{R})$ ja $Sp_n^{(B)}(\mathbb{R})$ ovat isomorfisia, ja etsi kääntyvä lineaarikuvaus L, jolle $L^{-1}AL = B$.

4. Pidetään tunnettuna, että kunnan $\mathbb{F}_{q^2}$ konjugaatioautomorfismi on muotoa $\bar{\lambda} = \lambda^q$. Tarkastellaan normikuvausta $N : \mathbb{F}_{q^2}^* \to \mathbb{F}_q^*$, $N(\lambda) = \lambda\bar{\lambda}$. Osoita, että normikuvaus on ryhmähomomorfismi, että sen ydin on $q+1$ alkion sylkinen ryhmä ja että se on surjektio. Päättele tästä, että jos kerroinkunta on $\mathbb{F}_{q^2}$, niin vektoriavaruuden mikä tahansa hermiittinen muoto voidaan jossain kannassa ilmaista yksikkömatriisina.

5. Essee: ortogonaaliset ryhmät.

Anna kurssista palautetta laitoksen nettisivujen kurssipalautelomakkeella.