Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Joukko-opin alkeet

Loppukoe 20.5.2008/Huuskonen

1. Olkoot A ja B joukkoja, $f : A \to B$ injektio sekä R joukon A ekvivalenssirelaatio. Asetetaan
$$S = \{\langle f(x), f(y)\rangle \mid x, y \in R\}.$$
Osoita, että S on jonkin joukon ekvivalenssirelaatio.

2. Osoita, että kaikille luonnollisille luvuille n pätee $n \notin n$.

3. Osoita, että rationaalilukujen yhteenlasku on vaihdannainen. (Kokonaislukujen aritmetiikan saa olettaa tunnetuksi.)

4. Olkoot x ja y reaalilukuja, $x <_{\mathbb{R}} y$. Osoita, että on olemassa sellainen rationaaliluku p, että $x <_{\mathbb{R}} E(p) <_{\mathbb{R}} y$, missä $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $E(q) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r <_{\mathbb{Q}} q\}$.

5. Oletetaan seuraava valinta-aksiooman muoto: Jokaiseen relaatioon R sisältyy sellainen funktio F, että $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(F)$. Osoita seuraava muoto todeksi: Jos $\mathcal{A}$ on sellainen perhe joukkoja, että $\emptyset \notin \mathcal{A}$, niin on olemassa sellainen funktio $f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$, että kaikilla $A \in \mathcal{A}$ pätee $f(A) \in A$.

Department of Mathematics and Statistics
Elements of Set Theory

Final Exam 2008-05-20/Huuskonen

1. Let A and B be sets, let $f : A \to B$ be one-to-one and let R be an equvalence relation on A. Set
$$S = \{\langle f(x), f(y)\rangle \mid x, y \in R\}.$$
Show that S is an equivalence relation on some set.

2. Show that for all natural numbers n it holds that $n \notin n$.

3. Show that the addition of rational numbers is commutative. (You may assume the arithmetic of integers to be known.)

4. Let x and y be real numbers, $x <_{\mathbb{R}} y$. Show that there is a rational number p such that $x <_{\mathbb{R}} E(p) <_{\mathbb{R}} y$, where $E : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $E(q) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r <_{\mathbb{Q}} q\}$.

5. Assume the following form of the Axiom of Choice: Every relation R contains a function F such that $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(F)$. Show that the following form holds: If $\mathcal{A}$ is a family of sets such that $\emptyset \notin \mathcal{A}$, then there is a function $f : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ such that for all $A \in \mathcal{A}$ it holds that $f(A) \in A$.