Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Joukko-opin alkeet

Loppukoe 24.5.2005/Huuskonen

1. Olkoot A ja B joukkoja, ja olkoon $f : A \to B$ funktio. Asetetaan

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\}.$$

Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio.

2. Osoita, että kaikki luonnolliset luvut ovat transitiivisia joukkoja.

3. Olkoot a, b, c kokonaislukuja. Osoita, että $a <_{\mathbb{Z}} b$ joss $a +_{\mathbb{Z}} c <_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} c$. (Vastaavan tuloksen luonnollisille luvuille voi otaksua tunnetuksi.)

4. Olkoot A ja B joukkoja, joille pätee $A \preceq B$ ja $B \preceq A$. Osoita, että $A \approx B$.

5. Osoita, että Zornin lemmasta seuraa valinta-aksiooma. Käytä seuraavaa valinta-aksiooman muotoa: Jokaiseen relaatioon R sisältyy sellainen funktio F, että $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(F)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Joukko-opin alkeet

Loppukoe 10.8.2005/Huuskonen

1. Olkoot a, b, c, d mielivaltaisia. Osoita, että $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$, joss $a = c$ ja $b = d$.

2. Olkoon $A \subseteq \omega$. Osoita suoraan määritelmien perusteella, että A on induktiivinen, joss $A = \omega$.

3. Olkoon $E : \omega \to \mathbb{Z}$ seuraavasti määritelty funktio:

$$E(n) = [(n, 0)].$$

Osoita, että kaikille $m, n \in \omega$ pätee $E(m) +_{\mathbb{Z}} E(n) = E(m +_{\omega} n)$.

4. Olkoon x reaaliluku, siis Dedekindin leikkaus. Konstruoi sellainen reaaliluku y, että $x +_{\mathbb{R}} y = 0_{\mathbb{R}}$.

5. Oletetaan, että mille tahansa kahdelle joukolle A, B pätee $A \preceq B$ tai $B \preceq A$. Osoita, että jokaisella joukolla A on olemassa relaatio $R \subseteq A \times A$, joka on joukon A hyvinjärjestys. (Saat olettaa kurssilla todistetut ordinaalien ominaisuudet tunnetuiksi.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Joukko-opin alkeet

Loppukoe 25.10.2005/Huuskonen

1. Olkoot R ja S relaatioita. Osoita, että jos R ja S ovat funktioita, niin $S \circ R$ on funktio. Päteekö käänteinen väite, eli jos $S \circ R$ on funktio, ovatko R ja S välttämättä funktioita?
2. Olkoot a, b, c luonnollisia lukuja. Osoita, että $a <_{\mathbb{N}} b$ joss $a +_{\mathbb{N}} c <_{\mathbb{N}} b +_{\mathbb{N}} c$.
3. Olkoon $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ määritelty seuraavasti: $F(m) = [\langle m, 1 \rangle]$. Osoita, että $F(m +_{\mathbb{Z}} n) = F(m) +_{\mathbb{Q}} F(n)$ kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. Voit olettaa kokonaislukujen laskulait tunnetuiksi.
4. Olkoot x, y ja z reaalilukuja, siis Dedekindin leikkauksia. Osoita, että $(x +_{\mathbb{R}} y) +_{\mathbb{R}} z = x +_{\mathbb{R}} (y +_{\mathbb{R}} z)$.
5. Osoita, että hyvinjärjestysperiaatteesta seuraa Zornin lemma.