HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 14.6.2007

1. Laatikossa on kolme kolikkoa:
   - yksi tavallinen symmetrinen kolikko,
   - yksi kolikko, jossa molemmilla puolilla on klaava, ja
   - yksi ei-symmetrinen kolikko, jolla kruunan todennäköisyys on p.

   Valitaan umpimähkään raha ja heitetään sitä.
   a) Mikä on todennäköisyys, että saadaan klaava?
   b) Heiton tuloksena saatiin kruuna. Mikä on todennäköisyys, että kyseessä oli ei-symmetrinen kolikko?

2. Tuotetta myydään pakkauksittain varastosta, jota täydennetään kerran viikossa. Kysyntä viikon aikana on satunnaismuuttuja, jonka jakauma on Poisson(100), yksikkönä pakkaus. Kuinka monta pakkausta on varattava, jotta todennäköisyys sille, että varasto ei lopu kesken viikon aikana, olisi $\geqslant 0{,}95$? Käytä normaaliapproksimaatiota.

3. Kolmivuotias Pekka ja kuusivuotias Kirsi saavat pelin, jota alkavat pelata keskenään. Vanhempi Kirsi oppii sen varran nopeammin, että hän voittaa n:nnessä pelissä todennäköisyydellä
$$2^{-2^{-n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
   Tasapelin mahdollisuutta ei ole ja pelit oletetaan riippumattomiksi. Mikä on todennäköisyys, ettei pieni Pekka milloinkaan voita Kirsiä, vaikka pelejä jatkettaisiin rajatta?

4. Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$
   Osoita, että f määrittelee jatkuvan jakauman tiheysfunktion. Oletetaan, että f on satunnaismuuttujaparin (X, Y) tiheysfunktio. Määritä $P(X + Y \leqslant 1)$.

5. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, arvojoukkona $\{x_1, x_2, \ldots\}$. X:n *ehdollinen odotusarvo* ehdolla A määritellään kaavalla
$$E(X \mid A) = \sum_k x_k P(X = x_k \mid A)$$
   edellyttäen, että $P(A) > 0$ ja että ko. sarja suppenee itseisesti. Olkoon lisäksi $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sellainen Ω:n ositus, että $P(A_i) > 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Osoita, että
$$EX = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, E(X \mid A_i).$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 9.8.2007

1. Kahta noppaa heitetetään. Olkoon satunnaismuuttuja Y maksimi noppien silmäluvuista, siis
$$Y = \max\{X_1, X_2\},$$
missä X_1 on ensimmäisen ja X_2 toisen nopan silmäluku. Määritä Y:n pistetodennäköisyysfunktio ja odotusarvo. Laske $P(Y \geqslant 8 \mid X_1 \leqslant 4)$.

2. Monivalintakokeen kysymykseen on m vaihtoehtoista vastausta. Todennäköisyys, että vastaaja tietää oikean vastauksen on p. Kun vastaaja ei tiedä oikeaa vastausta, hän arvaa oikein todennäköisyydellä $\frac{1}{m}$. Laske todennäköisyys, että vastaaja tietää vastauksen ehdolla, että hän vastaa oikein.

3. Koetta, jossa heitetään kuutta noppaa, toistetaan 3200 kertaa. Tarkastellaan tapahtuman A = "kaikki nopat osoittavat eri pistelukua" esiintymistä. Laske normaaliapproksimaatiolla todennäköisyys, että A esiintyy toistokokeessa yli 60 kertaa.

4. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden yhteisenä jakaumana on $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, sekä
$$Y = \max\{X_1, X_2\} \text{ ja } Z = \min\{X_1, X_2\}.$$
Johda satunnaismuuttujaparin (Y, Z) tiheysfunktio ja laske $\mathrm{Corr}(Y, Z)$.

5. Olkoon A ja B todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tapahtumia. Oletetaan, että $P(B) > 0$. Osoita, että
$$P(A \mid B) \geqslant 1 - \frac{P(A^c)}{P(B)}$$
kaikilla tapahtumilla $A \in \mathcal{F}$. Milloin yhtäsuuruus on voimassa?

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 24.1.2008

1. Opiskelija hakee kahta apurahaa. Todennäköisyys, että hän saa niistä ensimmäisen, on $\frac{1}{4}$, kun taas toisen apurahan saamisen todennäköisyys on $\frac{1}{2}$. Todennäköisyys, että opiskelija saa molemmat apurahat, on $\frac{1}{6}$.
   (a) Onko apurahojen saaminen kyseisen opiskelijan kohdalla toisistaan riippumatonta?
   (b) Opiskelija ei saanut ensimmäistä apurahaa. Mikä on tällä ehdolla todennäköisyys, että hän saa toisen apurahan?

2. Pankissa on 5 kassaa. Asiakkaiden palveluajat eri kassoilla ovat toisistaan riippumattomia ja eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona 5 minuuttia. Kun jokaisella kassalla on asiakas, muodostavat muut asiakkaat yhden jonon. Jonon ensimmäinen asiakas pääsee ensimmäiseen vapautuvaan kassaan. Järjestelmä siis vastaa pankeissa yleisesti käytössä olevaa numerolappusysteemiä.

   Oletetaan, että tarkasteltavalla hetkellä kaikilla kassoilla on asiakas ja jonossa on vähintään yksi odottelija. Olkoon T jonon ensimmäisen jonottajan odotusaika ennen kassalle pääsyä. Määritä T:n jakauma ja odotusarvo.

3. Kokeessa on 48 kysymystä vastausvaihtoehtoina tosi ja epätosi, joista vastaajan on valittava oikea vaihtoehto. Matti ei ole valmistautunut kokeeseen lainkaan, ja hän vain arvaa umpimähkään jokaisen vastauksensa. Maija on valmistautunut kokeeseen sen verran paremmin, että hänen todennäköisyytensä vastata kuhunkin kysymykseen oikein on $\frac{3}{4}$. Kokeen läpipääsyraja on 30 oikeaa vastausta. Vertaile Maijan ja Matin kokeen läpipääsyn todennäköisyyksiä käyttäen normaaliapproksimaatiota.

4. Olkoon funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^{-3}e^{-y}, & x > 1,\ y > 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$
   Osoita, että f määrittelee jatkuvan jakauman tiheysfunktion. Oletetaan, että f on satunnaismuuttujaparin (X, Y) tiheysfunktio. Määritä $P(X + Y \leqslant 2)$.

5. Olkoon X ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, jolla on odotusarvo EX.
   (a) Esitä *Markovin epäyhtälö*.
   (b) Olkoon $0 < p < 1$. Satunnaismuuttujan X *p-fraktiili* on luku x_p, jolle pätee
$$P(X \leqslant x_p) \geqslant p \quad \text{ja} \quad P(X \geqslant x_p) \geqslant 1 - p.$$
   (Tapauksessa $p = \frac{1}{2}$ fraktiilia kutsutaan *mediaaniksi*.) Osoita, että
$$x_p \leqslant \frac{EX}{1-p}.$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kurssikoe 3.3.2008

1. Oletetaan, että synnytyksessä
   - tytön todennäköisyys on $\frac{1}{2}$,
   - identtisillä kaksosilla sukupuolet ovat samat,
   - epäidenttisillä kaksosilla sukupuolet ovat riippumattomat,
   - kaikista kaksosista $\frac{1}{4}$ on identtisiä.

   a) Laske todennäköisyys, että synnytettäessä kaksoset molemmat ovat tyttöjä.

   b) Kaksossynnytyksessä molemmat lapset osoittautuvat tytöiksi. Mikä on todennäköisyys, että kaksoset ovat identtiset?

2. Eräällä matematiikan kurssilla on lukukauden aikana 24 luentoa (2 luentoa viikossa 12 viikon ajan). Kurssille osallistuu 20 opiskelijaa, joista 16 on naisia ja 4 miehiä. He kaikki osallistuvat jokaiselle luennolle.

   a) Jokaisen luennon alussa valitaan umpimähkään yksi opiskelija kirjoittamaan kyseisen luennon muistiinpanot. Kuvatkoon satunnaismuuttuja X lukukauden aikana valituiksi tulleiden miesopiskelijoiden lukumäärää. Mikä on X:n jakauma? Laske $P(X \geqslant 2)$.

   b) Lukukauden lopussa opiskelijoista valitaan umpimähkään neljän hengen työryhmä tarkistamaan ja kokoamaan yhteen kurssin aikana kirjoitetut muistiinpanot. Kuvatkoon satunnaismuuttuja Y työryhmään valituiksi tulleiden naisopiskelijoiden lukumäärää. Mikä on Y:n jakauma? Laske todennäköisyys, että työryhmään tulee yhtä monta naista ja miestä.

3. Eräälle tilastotieteen kurssille ilmaantuvien henkilöiden lukumäärä noudattaa Poisson-jakaumaa odotusarvonaan 50. Luentosalissa on 60 paikkaa. Laske normaaliapproksimaatiolla todennäköisyys, että kurssille tulijoita on enemmän kuin 60 ja luentosali joudutaan vaihtamaan suurempaan. *Muistutus*: Jos $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, niin $EX = D^2X = \lambda$.

Valitse seuraavista tehtävistä 4A ja 4B *vain toinen*, johon vastaat. Jos palautat vastauspaperin, jossa on molempien tehtävien 4A ja 4B ratkaisut, etkä ilmoita, kumpi tehtävistä arvostellaan, niin arvostelussa otetaan huomioon vähemmän pisteitä tuottavan tehtävän ratkaisu.

4A. Olkoon A todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tapahtuma. Tutki, onko mahdollista, että A on riippumaton itsensä kanssa, eli $A \perp\!\!\!\perp A$.

4B. Olkoon funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että f määrittelee jatkuvan jakauman tiheysfunktion. Oletetaan, että f on jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujaparin (X, Y) tiheysfunktio. Määritä X:n reunatiheysfuntio f_X sekä laske EX ja D^2X.

Vastaa kurssikyselyyn `http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/` heti tentin jälkeen!

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 3.4.2008

1. Perheen äidin tiedetään olevan tyyppiä aa ja isä on joko tyyppiä AA tai Aa todennäköisyyksin p ja $1-p$. Jos isä on AA, lapsi on välttämättä Aa, jos taas isä on Aa, lapsi on Aa tai aa todennäköisyyksin $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$. Kolmesta lapsesta kaikki ovat tyyppiä Aa. Mikä on todennäköisyys, että isä on AA?

2. Olkoon $X \sim \text{Tas}(-1, 1)$.
   a) Johda satunnaismuuttujan $Y = X^2 - 1$ tiheysfunktio.
   b) Laske $P(-\frac{1}{4} < Y < 0)$.

3. Suuressa tavaratalossa on 100 kassaa. Yksittäisten kassojen päivän aikana tekemät virheet X_i ovat riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona $EX_i = 1{,}50$ ja hajontana $DX_i = 6{,}00$, yksikkönä €.
   a) Olkoon kokonaisvirhe
   $$X = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$
   Laske normaaliapproksimaatiolla todennäköisyys $P(X > 200\ €)$.
   b) Oletetaan, että tavaratalo on avoinna 25 päivänä kuukaudessa ja että eri päivät ovat riippumattomia. Olkoon N niiden päivien lukumäärä kuukauden aikana, jolloin kokonaisvirhe on yli 200 €. Laske normaaliapproksimaatiolla todennäköisyys $P(N > 7)$.

4. Osoita, että funktio $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $$F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x+y \geqslant 0, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$
   ei ole kaksiulotteisen jakauman kertymäfunktio.

5. Olkoon X satunnaismuuttuja, jolla on odotusarvo $EX = \mu$ ja varianssi $D^2X = \sigma^2 > 0$.
   a) Esitä *Tšebyševin epäyhtälö*.
   b) Osoita, että
   $$P(|X-\mu| < a) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}$$
   kaikilla $a > 0$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 12.6.2008

1. Eräässä yhteiskunnassa lasten hankkiminen päättyy ensimmäiseen poikalapseen. Oletetaan, että lasten lukumäärällä ei ole ylärajaa, poikalapsen todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ ja että lasten sukupuolet eri syntymissä ovat riippumattomia.
   a) Mikä on perheen tyttölasten lukumäärän X jakauma ja odotusarvo?
   b) Määritä todennäköisyys, että perheen 3. lapsi on poika.
   c) Määritä todennäköisyys, että perheen 6. lapsi on poika, kun perheeseen on jo syntynyt 3 tyttöä.

2. Olkoon $X \sim \mathrm{Tas}(0, 1)$. Johda satunnaismuuttujan $-\ln X$ jakauma.

3. Tilastollinen todennäköisyys, että syntyvä lapsi on poika, on 0,512. Kaupungissa syntyy vuodessa 1000 lasta. Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen likiarvo todennäköisyydelle, että poikien lukumäärä ylittää tyttöjen lukumäärän.

4. Olkoon jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujaparin (X, Y) tiheysfunktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} 6y, & 0 < x < x + y < 1, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$
Laske korrelaatiokerroin $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

5. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, arvojoukkona $\{x_1, x_2, \ldots\}$. X:n *ehdollinen odotusarvo* ehdolla A määritellään kaavalla
$$E(X \mid A) = \sum_k x_k P(X = x_k \mid A)$$
edellyttäen, että $P(A) > 0$ ja että ko. sarja suppenee itseisesti. Olkoon lisäksi $\{A_1, \ldots, A_n\}$ sellainen Ω:n ositus, että $P(A_i) > 0$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Osoita, että
$$EX = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, E(X \mid A_i).$$

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 14.8.2008

1. Luvuista $1, \ldots, 7$ valitaan ensin umpimähkään yksi. Jos valittu luku on i, luvuista $1, \ldots, i$ valitaan umpimähkään yksi. Olkoon
$$A_i = \text{"1. luku on } i\text{"},$$
$$B_k = \text{"2. luku on } k\text{"}.$$
Ilmoita taulukkona yhdistetyn kokeen pistetodennäköisyydet
$$p_{ik} = P(A_i \cap B_k).$$
Määritä a) $P(B_1)$, b) $P(A_3 \mid B_1)$, c) $P(\text{"luvut ovat samat"})$.

2. Tehdas valmistaa tuotetta, jonka kestoaika kulutuksessa (vuosissa laskettuna) on jakaumaltaan $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Tehtaan johto voi säädellä parametria λ.
   a) Mikä λ:n tulisi olla, jotta todennäköisyys, että kestoaika olisi korkeintaan 3 vuotta, olisi vähintään 0,5?
   b) Olkoon λ_0 se parametrin arvo, jonka sait a-kohdassa vaadituksi alarajaksi λ:lle. Laske todennäköisyys, että tehtaan valmistama kestojaltaan $\mathrm{Exp}(\lambda_0)$-jakautunut tuote kestää kulutuksessa vähintään 9 vuotta, kun se on jo kestänyt 3 vuotta.

3. Olkoon $\{X_1, \ldots, X_{10}\}$ otos jakaumasta $\mathrm{Tas}(0,1)$. Määritä normaaliapproksimaatiolla likiarvo todennäköisyydelle
$$P\left(\sum_{k=1}^{10} X_k > 7\right).$$

4. Olkoon funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2), & 0 < x < 1,\ 0 < y < x, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$
Määritä vakio c siten, että f määrittelee jatkuvan jakauman tiheysfunktion. Oletetaan, että f on sm-parin (X, Y) tiheysfunktio. Määritä $P(X + Y \leqslant \frac{1}{2})$.

5. Olkoon $(P, \Omega, \mathscr{F})$ todennäköisyysavaruus.
   (a) Esitä *tapahtumien* $A, B \in \mathscr{F}$ *riippumattomuuden* määritelmä.
   (b) Olkoon $A \in \mathscr{F}$. Tutki, onko mahdollista, että A on riippumaton itsensä kanssa, eli $A \perp\!\!\!\perp A$.
   (c) Esitä todennäköisyysavaruuden $(P, \Omega, \mathscr{F})$ *satunnaismuuttujien* X ja Y *riippumattomuuden* määritelmä.
   (d) Olkoon X satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudessa $(P, \Omega, \mathscr{F})$. Tutki, onko mahdollista, että X on riippumaton itsensä kanssa, eli $X \perp\!\!\!\perp X$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Loppukoe 21.10.2008

1. Kymmenestä arvasta kaksi on voittoarpoja. Millä todennäköisyydellä umpimähkään valitun viiden arvan joukossa on
   (a) vähintään yksi voittoarpa,
   (b) molemmat voittoarvat,
   (c) täsmälleen yksi voittoarpa?

2. Tikkataulu muodostuu samankeskisistä r-, $2r$-,..., $10r$-säteisistä ympyröistä ($r > 0$ vakio), joista muodostuva uloin ympyrärengas antaa yhden pisteen, seuraava kaksi pistettä jne. Keskellä oleva ympyrä antaa 10 pistettä. Oletamme, että tauluun heitettäessä osa-alueen todennäköisyys on verrannollinen sen pinta-alaan. Määritä yhdellä (tauluun osuvalla) tikalla saatavan pisteluvun odotusarvo.

3. Eräällä matematiikan kurssilla on 10 harjoituskertaa ja jokaisessa harjoituksessa on kuusi tehtävää. Kaikki tehtävät ovat keskimäärin yhtä vaikeita ja niiden ratkaiseminen on toisistaan riippumatonta. Opiskelija A:n jokaisen yksittäisen tehtävän ratkaisemistodennäköisyyden oletetaan olevan $\frac{1}{3}$. Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen todennäköisyys, että A laskee kurssin aikana vähintään 20 mutta enintään 30 harjoitustehtävää.

4. Olkoon funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < x, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$
Määritä vakio c siten, että f määrittelee jatkuvan jakauman tiheysfunktion. Oletetaan, että f on sm-parin (X, Y) tiheysfunktio. Määritä luku a ($0 < a < 1$) siten, että $P(X \leqslant a) = \frac{1}{4}$.

5. (a) Esitä *todennäköisyyden (Kolmogorovin) aksioomat* kuvaukselle $P\colon \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, missä $\mathscr{F}$ on σ-algebra epätyhjässä perusjoukossa Ω.
   (b) Olkoon $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ todennäköisyysavaruus. Osoita todennäköisyyden aksioomiin perustuen, että
      (i) $P(\emptyset) = 0$,
      (ii) $P(A^c) = 1 - P(A)$ kaikilla $A \in \mathscr{F}$,
      (iii) kun $A, B \in \mathscr{F}$, $A \cap B = \emptyset$, niin $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Kurssikoe 2.3.2009

1. Kukkarossa on 65 kolikkoa, joista yhdessä on molemmilla puolilla kruuna. Muut kolikot ovat tavallisia, joissa toisella puolella on kruuna ja toisella klaava. Kukkarosta valitaan umpimähkään yksi kolikko ja aletaan heittää sitä. Jos kuudessa ensimmäisessä heitossa jokaisen heiton tulos on ollut kruuna, niin mikä on todennäköisyys, että valituksi tullut kolikko on se, jossa on kruuna molemmilla puolilla?

2. Oletetaan, että auton korjaamiseen kuluva aika T on eksponenttijakautunut satunnaismuuttuja (yksikkönä tunti). Pitkän kokemuksen perusteella autokorjaamolla tiedetään, että auton korjaamiseen kuluu aikaa keskimäärin 2 tuntia. Voit siis olettaa, että $ET = 2$. Eräänä aamuna herra K tuo autonsa korjattavaksi ja auton korjaaminen aloitetaan klo 8.
   (a) Laske todennäköisyys, että kun herra K soittaa autokorjaamoon klo 12, niin auto on jo korjattu ja sen voi noutaa.
   (b) Soittaessaan autokorjaamoon klo 12 herra K saa kuulla, että autoa ei ole vielä saatu korjatuksi. Laske tällä ehdolla todennäköisyys, että auton korjaaminen on edelleen kesken työpäivän päättyessä klo 16.

3. Noppaa heitetään 420 kertaa. Laske normaaliapproksimaatiota käyttäen likiarvo todennäköisyydelle, että nopan pistelukujen summa on 1400 ja 1550 välillä.

4. (a) Määritä vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} c|x|, & -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$
   määrittelee tiheysfunktion.
   (b) Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio on f. Määritä X:n kertymäfunktio F.
   (c) Laske $P(X^2 > 2)$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Erilliskoe 2.4.2009

1. Lontoossa puolet päivistä ovat sateisia (eli sataa ainakin vähän). Sääennuste osuu oikeaan kahdella kerralla kolmesta, eli todennäköisyys, että sataa, kun on ennustettu sadetta, ja toisaalta todennäköisyys, että ei sada, kun sadetta ei ole ennustettu, ovat kummatkin $2/3$. Kun on ennustettu sadetta, niin herra K ottaa sateenvarjon mukaansa. Kun sadetta ei ole ennustettu, niin herra K ottaa sateenvarjon mukaansa todennäköisyydellä $1/3$. Laske todennäköisyys, että
   a) herra K:lla ei ole sateenvarjoa mukanaan, kun sataa,
   b) ei sada, kun herra K:lla on sateenvarjo mukanaan.

2. Pankissa on 5 kassaa. Asiakkaiden palveluajat ovat toisistaan riippumattomia ja eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona 5 minuuttia. Kun jokaisella kassalla on asiakas, muodostavat muut asiakkaat yhden jonon. Jonon ensimmäinen asiakas pääsee ensimmäiseen vapautuvaan kassaan. Näin ollen järjestelmä vastaa pankeissa yleisesti käytössä olevaa numerolappusysteemiä.

   Oletetaan, että tarkasteltavalla hetkellä kaikilla kassoilla on asiakas ja jonossa on vähintään yksi odottelija. Olkoon satunnaismuuttuja T jonon ensimmäisen jonottajan odotusaika ennen kassalle pääsyä. Määritä T:n jakauma ja odotusarvo.

3. Eräs suomalainen yliopisto haluaa saada 1050 uutta opiskelijaa. Kyseinen yliopistokaupunki voi tarjota asunnon 1060 uudelle opiskelijalle. Aikaisempien vuosien perusteella tiedetään, että hyväksytyistä hakijoista 60 % vastaanottaa opiskelupaikan ja aloittaa yliopisto-opinnot. Arvioi normaaliapproksimaatiolla todennäköisyyttä, että kaikki uudet opiskelijat saavat asunnon, kun yliopisto lähettää hyväksymiskirjeen 1700 hakijalle.

4. Olkoon $X \sim \text{Tas}(-1, 1)$.
   a) Johda satunnaismuuttujan $Y = X^2 - 1$ tiheysfunktio.
   b) Laske $P(-\frac{1}{4} < Y < 0)$.

5. Esitä satunnaismuuttujien X ja Y *kovarianssin*, *korrelaatiokertoimen* ja *korreloimattomuuden* määritelmät. Kiinnitä huomiota siihen, mitä X:ltä ja Y:ltä vaaditaan, jotta määritelmät ovat voimassa. Osoita, että
   a) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X$ ja Y ovat korreloimattomia,
   b) X ja Y ovat korreloimattomia $\not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus todennäköisyyslaskentaan
Erilliskoe 11.6.2009

1. Keskimäärin joka neljäs suomalainen omistaa auton. Laske todennäköisyys, että umpimähkään valitun kuuden suomalaisen joukosta vähintään kolmella on auto.

2. Alustavien tutkimusten perusteella lääkäri otaksuu, että potilaalla on jokin sairauksista S_1, S_2 tai S_3 (mutta vain yksi näistä). Ennen lisätutkimuksia lääkäri olettaa jokaisen sairauden todennäköisyyden yhtä suureksi. Hän tekee potilaalle kokeen, jonka tulos on positiivinen todennäköisyyksin

$$\begin{cases} 0{,}8, & \text{jos potilaalla on sairaus } S_1, \\ 0{,}6, & \text{jos potilaalla on sairaus } S_2, \\ 0{,}4, & \text{jos potilaalla on sairaus } S_3. \end{cases}$$

Kokeen tulos osoittautuu positiiviseksi. Mikä on tällä ehdolla kunkin sairauden esiintymisen todennäköisyys potilaalla?

3. Olkoon $X \sim \mathrm{Tas}(-\pi/2, \pi/2)$. Johda jakauman $Y \sim \tan X$ tiheysfunktio. Tällöin Y on *Cauchy-jakautunut* parametrilla 0, merkitään $Y \sim \mathrm{Cauchy}(0)$. Laske $P(|Y| \leqslant 1)$. Muista, että arkustangentin derivaatta on $D(\arctan x) = (1 + x^2)^{-1}$.

4. Tuotetta myydään pakkauksittain varastosta, jota täydennetään kerran viikossa. Kysyntä viikon aikana on satunnaismuuttuja, jonka jakauma on Poisson(100), yksikkönä pakkaus. Kuinka monta pakkausta on varattava, jotta todennäköisyys sille, että varasto ei lopu kesken viikon aikana, olisi $\geqslant 0{,}95$? Käytä normaaliapproksimaatiota.

5. (a) Osoita eksponenttijakauman *muistinmenetysominaisuus*: Jos $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ jollakin $\lambda > 0$, niin
$$P(X > t + h \mid X > t) = P(X > h) \quad \text{kaikilla } t \geqslant 0,\ h > 0.$$
(b) Keksi itse jokin muu positiivinen satunnaismuuttuja Y ja osoita, että Y:llä ei ole muistinmenetysominaisuutta. Muista perustella myös se, että keksimäsi satunnaismuuttujan Y tiheysfunktio määrää jatkuvan jakaman.

Taulukko 1. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519938	.523922	.527903	.531881	.535856
0.1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563560	.567495	.571424	.575345
0.2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0.3	.617911	.621720	.625616	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0.4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0.5	.691462	.694974	.698468	.702944	.705402	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0.6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0.7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0.8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802338	.805106	.807850	.810570	.813267
0.9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1.0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1.1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1.2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1.3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1.4	.919243	.920730	.922196	.923642	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931889
1.5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1.6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950528	.951543	.952540	.953521	.954486
1.7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1.8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1.9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2.0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2.1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2.2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2.3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3.0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952