Johdatus suurten poikkeamien teoriaan 3.4.2008

1. Olkoon $\{X_n\}$ $\mathbf{R}^d$-arvoinen satunnaisvektoriperhe ja $I : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vauhtifunktio.

a) Oletetaan, että mielivaltaiselle kompaktille joukolle $F \subseteq \mathbf{R}^d$ pätee

$$(*) \qquad \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in F) \leq - \inf_{x\in F} I(x).$$

Osoita, että $(*)$ pätee mielivaltaiselle suljetulle joukolle $F \subseteq \mathbf{R}^d$, jos $\{X_n\}$ on eksponentiaalisesti tiukka.

b) Oletetaan, että mielivaltaiselle $x \in \mathbf{R}^d$ ja $\varepsilon > 0$ pätee

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in B(x,\varepsilon)) \geq -I(x).$$

Olkoon $G \subseteq \mathbf{R}^d$ mielivaltainen avoin joukko. Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(X_n \in G) \geq -\inf\{I(x) \mid x \in G\}.$$

2. Olkoot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia, $\mathbf{P}(\xi_j = 0) = 1 - p_j$ ja $\mathbf{P}(\xi_j = 1) = p_j$ kaikilla $j \in \mathbf{N}$, missä $p_j \in [0,1]$. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in (0,1)$. Olkoon $X_n = n^{-1}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Osoita, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen ja määrää vauhtifunktio.

b) Osoita, että $X_n \to \mu$ m.v. eräälle $\mu \in \mathbf{R}$ ja määrää μ.

3. Oletetaan, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen $\mathbf{R}^d$:ssä vauhtifunktiolla I. Oletetaan lisäksi, että

$$\Lambda(t) = \limsup n^{-1} \log \mathbf{E}\left(e^{\langle t, Y_n\rangle}\right) < \infty, \quad \forall t \in \mathbf{R}^d,$$

missä $Y_n = nX_n$. Olkoon J mielivaltainen konveksi vauhtifunktio, jolle $J(x) \leq I(x), \forall x$. Osoita, että $J(x) \leq \Lambda^*(x), \forall x$.