MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Johdatus Konformigeometriaan
Loppukoe
14.6. ~~9.5.~~ 2006

VASTAA NELJÄÄN TEHTÄVÄÄN!

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, ja $d_1(x, y) = d(x, y)^\alpha$ $0 \leq \alpha \leq 1$. Osoita että (X, d_1) on myös metrinen avaruus.

2. Alueessa G määritellään pisteille $x, y \in G$

$$h_G(x, y) = \sup_{z \in \partial G} \left| \log \frac{|z - x|}{|z - y|} \right| .$$

(a) Osoita että h_G on pseudometriikka G:ssä, eli se toteuttaa muut metriset aksiomit, mutta siitä että $d(x, y) = 0$ ei välttämättä seuraa että $x = y$). Osoita myös että h_G on aito metriikka jos ∂G ei ole suoran tai ympyrän aito osajoukko.

(b) Osoita että jos $G = \mathbf{B}^n$ ja pisteet a, b, c ovat samalla säteellä, niin kolmioepäyhtälö pätee yhtälönä.

(c) Selitä miksi h_G on invariantti similariteettikuvausten suhteen.

3. Olkoon $f(x) = a + r^2(x - a)/|x - a|^2$ inversio, jolle $f(\mathbf{H}^n) = \mathbf{H}^n$. Siispä $a_n = 0$. Osoita että $|f(x) - f(y)|^2/(f(x)_n f(y)_n)$ $|x - y|^2/(x_n y_n)$ kaikilla $x, y \in \mathbf{H}^n$.

4. Observe first that, for $t \in (0, 1)$,

$$\rho_{\mathbf{H}^n}(te_n, e_n) = \rho_{\mathbf{H}^n}(te_n, S^{n-1}(\tfrac{1}{2}e_n, \tfrac{1}{2})).$$

Making use of this observation and the formula for ρ-balls in terms of euclidean balls show that

$$B^n(\tfrac{1}{2}e_n, \tfrac{1}{2}) = \bigcup_{t \in (0,1)} D(te_n, \log \tfrac{1}{t}) .$$

5. Show that for all $x, y \in G \subsetneq \mathbb{R}^n$ the inequality

$$\inf_{\gamma \in \Gamma_{xy}} \log \left(1 + \frac{\ell(\gamma)}{\min\{d(x), d(y)\}} \right) \leq k_G(x, y),$$

where Γ_{xy} is the family of all curves connecting the points x and y within G, and $d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial G)$.