Johdatusta geometrisiin algebroihin ja niiden sovellutuksiin - kurssin loppukoe (20. 1. 2005)

Valitse neljä tehtävää. Kaikilla tehtävillä on sama arvo.

1. Olkoon $A = 1 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ ja $B = 3 + \mathbf{u}_1/2$, missä $\mathbf{u}_1$ ja $\mathbf{u}_2$ ovat kaksi ortonormaalia vektoria (eli $\mathbf{u}_1^2 = \mathbf{u}_2^2 = 1$ ja $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$). Laske a) AB b) $A \rfloor B$ ja c) $A \wedge B$.

2. Mitkä seuraavista väitteistä eivät aina ole tosia:

   (a) $|A|^2 = \langle A^\dagger A \rangle_{\bar{0}}$

   (b) $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$

   (c) $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$

   (d) $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$

   (e) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \lambda \mathbf{a}$.

   (f) $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

   (g) $\mathbf{a} \rfloor (i\mathbf{b}) = i\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

   missä A on mielivaltainen multivektori, $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ ovat äärellisiä vektoreita $\mathsf{E}(3)$:ssa, λ on jokin reaaliluku, i on yksikkötrivektori ja symbolit $\times$, $\cdot$, $\wedge$ ja $\rfloor$ symboloivat ristituloa, pistetuloa, ulkotuloa ja (vasenta) kontraktiota.

3. (a) Ratkaise vektoriyhtälö

   $$\alpha \mathbf{x} + \mathbf{a}\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e} \tag{1}$$

   vektorin $\mathbf{x}$ suhteen, missä $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{e}$ ovat vektoreita ja α on nollasta eroava reaaliluku (vihje: ota aluksi kummankin puolen pistetulo vektorin $\mathbf{b}$ suhteen).

   (b) Kuvaile miten a)-kohdan ratkaisua voidaan hyödyntää, jos halutaan helposti löytää lineaarikuvauksen $\mathsf{L}\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x} + \mathbf{a}\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$ käänteiskuvaus.

4. Todista että kuvaus

   $$\mathbf{x} \to -\mathbf{u}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{u}$$

   heijastaa vektorin $\mathbf{x}$ vektoria $\mathbf{u}$ pitkin (eli siis vaihtaa vektori $\mathbf{x}$:n vektorin $\mathbf{u}$:n suuntaisen komponentin merkin).

5. Osoita, että kontraktio on derivaattaoperaattori siinä mielessä, että

   $$x \rfloor (uv) = (x \rfloor u)\, v + u' \,(x \rfloor v)$$

   jokaiselle vektorille x ja $u \in Cl_{p,q}$,, missä pääinvoluutio $'$ määräytyy lineaarikuvauksena kaavasta

   $$e'_\nu = (-1)^{|\nu|}\, e_\nu.$$

6. Osoita, että x on paravektori kvaternioinien algebrassa

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \{x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_{12} e_{12} \mid x_0, x_1, x_2, x_{12} \in \mathbb{R},\ e_{12} = e_1 e_2\} \\ &= Cl_{0,2} \end{aligned}$$

jos ja vain jos

$$x + e_1 x e_1 + e_2 x e_2 = -x'.$$

7. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ ja $M_1 f = Df + \frac{Q'f}{x_2}$ Osoita, että

   (a) $M_1 (fa) = (M_1 f)\, a$ jokaiselle $a = a_0 + a_1 e_1,\ a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

   (b) $M_1 (fx) = (M_1 f)\, x$ jos ja vain jos f on paravektoriarvoinen.

8. Määritte hyperholomorfinen funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$. Osoita, että x^m on hyperholomorfinen jokaiselle $m \in \mathbb{N}$.