JOHDATUS FOURIER–ANALYYSIIN
VÄLIKOE 1
SYKSY 2004 8.11.04

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π–periodinen funktio, jolle $f(x) = 1$, kun $-\pi \le x \le 0$, ja $f(x) = x$, kun $0 < x \le \pi$. Esitä f:n kompleksinen Fourier–sarja.

2. Osoita, että lineaarinen kuvaus $T : f \mapsto \hat{f}(5/4)$ on jatkuva, kuvauksena Banach–avaruudesta $L^1(\mathbf{R})$ avaruuteen $\mathbf{C}$.
(Avaruuden $L^1(\mathbf{R})$ normi määritellään kaavalla

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx,$$

ja avaruutta $\mathbf{C}$, eli kompleksilukujen joukkoa, voidaan pitää Banach–avaruutena, kun alkion normi on sen moduli eli itseisarvo.)

3. Laske funktion $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$, $g(x) = 4x_2$, kun $x = (x_1, x_2) \in [3,5] \times [4,5]$, ja $g(x) = 0$ muulloin, Fourier–muunnos.

4. Mikä on Dirichlet'n ydin? Esitä sille lausekkeet sekä kompleksisessa että reaalisessa muodossa (jälkimmäinen siis trigonometristen funktioiden avulla.)

JOHDATUS FOURIER–ANALYYSIIN
VÄLIKOE 2
SYKSY 2004

1. Tiedetään, että gaussisen funktion $\varphi(x) := e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbf{R}$, Fourier–muunnos on funktio itse, eli

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx = \varphi(k).$$

Mikä on siis funktion $g(x) := e^{-3x^2+ix}$, $i =$ imaginaariyksikkö, Fourier–muunnos? Opastus. Muuttujanvaihto integraalissa.

2. Tarkastellaan distribuutioita joukossa $\Omega := \mathbf{R}$. Olkoon, kaikilla $n \in \mathbf{N}$, f_n lokaalisti integroituva funktio $f_n(x) := n/2$, kun $x \in [-1/n, 1/n]$, ja $f_n(x) := 0$ muulloin. Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ distribuutioon δ_0 (distribuutioavaruuden $D'(\mathbf{R})$ heikon topologian suhteen)?

3. Mikä on lokaalisti integroituvan funktion $x + 4 \in S'(\mathbf{R})$ Fourier–muunnos?

4. Onko lineaarinen kuvaus

$$f \mapsto \int_0^4 f(x) dx \ , \qquad \text{missä } f \in D(\mathbf{R}),$$

distribuutio joukossa $\mathbf{R}$?

JOHDATUS FOURIER–ANALYYSIIN
LOPPUKOE 20.1.2005

1. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 2π–periodinen funktio, jolle $f(x) = x$, kun $-\pi \le x \le 0$, ja $f(x) = 3$, kun $0 < x \le \pi$. Esitä f:n kompleksinen Fourier–sarja.

2. Laske funktion $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$, $g(x) = 3x_1x_2$, kun $x = (x_1, x_2) \in [0, 10] \times \mathbf{R}$, ja $g(x) = 0$ muulloin, Fourier–muunnos. Ohje. Funktio g on tulo kahdesta funktiosta. joista toinen riippuu x_1:stä ja toinen x_2:sta. Oikean vastauksen saat siten, että käsittelet nämä tekijät kummankin erikseen, ja kerrot lopuksi niiden Fourier–muunnokset keskenään.

3. Gaussisen funktion $\varphi(x) := e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbf{R}$, Fourier–muunnos on funktio itse, eli

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\varphi(x)dx = \varphi(k).$$

Mikä on funktion $h(x) := e^{-2x^2+2ix}$, $i =$ imaginaariyksikkö, Fourier–muunnos?

4. Tarkastellaan distribuutioita joukossa $\Omega := \mathbf{R}$. Olkoon, kaikilla $n \in \mathbf{N}$, f_n lokaalisti integroituva funktio $f_n(x) := (1+x)n$, kun $x \in [-1/(2n), 1/(2n)]$, ja $f_n(x) := 0$ muulloin. Suppeneeko funktiojono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ distribuutioon δ_0 (distribuutioavaruuden $D'(\mathbf{R})$ heikon topologian suhteen)?

5. Onko lineaarinen kuvaus

$$f \mapsto \int_0^5 x^3 f(x)dx\ , \qquad \text{missä } f \in D(\mathbf{R}),$$

distribuutio joukossa $\mathbf{R}$?