Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

14.6.2007

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Olkoon $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Merkitsemme $\complement A$:lla joukon A komplementtia joukossa X, $\complement B$:lla joukon B komplementtia joukossa Y ja $\complement(A \times B)$:lla joukon $A \times B$ komplementtia tulojoukossa $X \times Y$. Todista joukkoyhtälö

$$\complement(A \times B) = \big(\complement A \times Y\big) \cup \big(X \times \complement B\big)\,.$$

2. Määrittelemme kuvauksen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla $f(n) = 2n - \min(n, 100)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:

   (a) Onko f injektio?

   (b) Onko f surjektio?

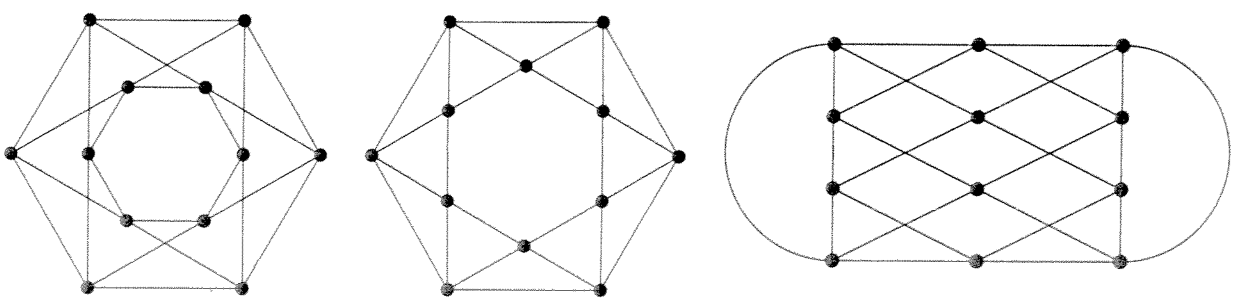
3. Fibonacin lukujono $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$. Osoita, että jokaisella $k \in \mathbb{N}$ luku F_k on parillinen jos ja vain jos luku k on kolmella jaollinen.

   [Ohje: Induktiolla luvun n suhteen voit osoittaa halutun tuloksen seuraavassa muodossa: *jokaisella $n \in \mathbb{N}$ luku F_{3n} on parillinen ja luvut F_{3n+1} ja F_{3n+2} ovat parittomia.*]

4. Montako eri sanaa voimme muodostaa järjestelemällä sanan VESIHIISI kirjaimet uudelleen, kun vaadimme, että muodostuvan sanan ensimmäinen kirjain ei ole sama kuin sen viimeinen kirjain?

   [Ohje: Vähennä kaikkien eri sanojen lukumäärästä niiden sanojen lukumäärä, joissa on sama ensimmäinen ja viimeinen kirjain.]

5. Ovatko mitkään kaksi seuraavista verkoista keskenään isomorfisia? Perustele vastauksesi!



Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

9.8.2007

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

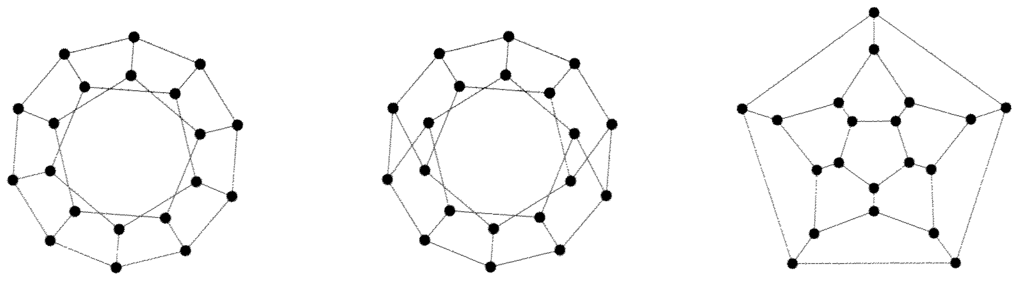
1. Merkitsemme $D\Delta E$:llä joukkojen D ja E *symmetristä erotusta* $(D \setminus E) \cup (E \setminus D)$. Osoita, että äärellisille joukoille D ja E on voimassa $|D\Delta E| = |D| + |E| - 2\,|D \cap E|$.

2. Olkoon X joukko ja $A \subset X$. Näytä, että kaavan $\varphi(E) = E\Delta A$ määrittämä kuvaus $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ on bijektio.
   [Ohje: Osoita, että φ on itsensä käänteiskuvaus.]

3. Olkoot k, l ja m positiivisia luonnollisia lukuja ja $n = k + l + m$. Näytä, että on voimassa multinomikerrointen välinen yhtälö
$$\binom{n}{k\ l\ m} = \binom{n-1}{k-1\ l\ m} + \binom{n-1}{k\ l-1\ m} + \binom{n-1}{k\ l\ m-1}.$$

4. Fibonacin lukujono $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$.
   Todista induktiolla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa epäyhtälö $F_n < (\frac{7}{4})^n$.

5. Ovatko mitkään kaksi seuraavista verkoista keskenään isomorfisia? Perustele vastauksesi!



G H J

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Kurssikoe/Huuskonen
14.12.2007

1. (a) Montako osajoukkoa joukolla $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on?

   (b) Kuinka monessa näistä osajoukoista on tasan 5 alkiota?

2. Todista induktiolla, että jokaiselle luonnolliselle luvulle n pätee

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

3. Päteekö seuraava yhtälö kaikille joukoille A, B, C? Perustele todistamalla se oikeaksi tai esittämällä vastaesimerkki. (Pelkk' Venn-diagrammi ei riit'.)

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = A \setminus C$$

4. Ovatko seuraavat verkot (V_1, E_1) ja (V_2, E_2) keskenään isomorfiset? Perustele.

$$\begin{aligned} V_1 &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ E_1 &= \{\overline{01}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{40}\} \\ V_2 &= \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ E_2 &= \{\overline{57}, \overline{58}, \overline{68}, \overline{69}, \overline{79}\} \end{aligned}$$

   T'ss' esim. $\overline{01}$ merkitsee suuntaamatonta viivaa pisteiden 0 ja 1 v'lill'.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus diskreettiin matematiikkaan
Korvaava kurssikoe/Huuskonen
17.12.2007

1. Montako anagrammia on seuraavilla sanoilla?

   (a) OSAKEYHTIÖ

   (b) KEKKONEN

2. Todista induktiolla, että jokaiselle luonnolliselle luvulle n pätee

$$\sum_{k=0}^{n} 2k + 1 = n^2.$$

3. Olkoot A, B, C sellaiset joukot, että $|A| = |B| = |C| = 6$, $|A \cap B| = 3$ ja $(A \cup B) \cap C = \emptyset$. Laske $|A \cup B \cup C|$.

4. Onko seuraava verkko (V, E) kaksijakoinen? Perustele.

$$\begin{aligned} V &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ E &= \{\overline{01}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{41}\} \end{aligned}$$

Department of Mathematics and Statistics

Introduction to Discrete Mathematics

24.1.2008

Write your name and your social security or student number on each paper.

1. Let A and B be finite sets. Show that

$$|A \setminus B| - |B \setminus A| = |A| - |B| .$$

2. Let f be a mapping $X \to Y$. Show that the following inclusions hold for all $A \subseteq X$ and $B \subseteq Y$:

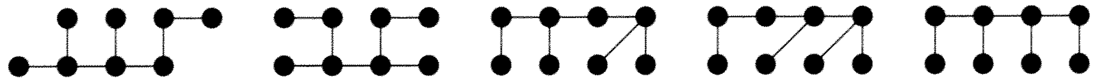
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B .$$

3. The Fibonacci sequence $F_0, F_1, F_2, \ldots$ is defined recursively by the conditions $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ for $n \geq 1$.
Use induction to show that the following holds for every $n \in \mathbb{N}$:

F_{3n} is even, but F_{3n+1} and F_{3n+2} are odd.

4. There are ten different books on the table. In how many different ways can Liisa, Eero, Pekka and Irja divide the books between themselves so that Liisa gets four books, Eero three, Pekka two and Irja one?
[Hint: Re-arragements of the letters in the word LLLLEEEPPI]

5. Which of the trees shown below are mutually isomorphic? Justify your answer!



Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

24.1.2008

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Osoita, että äärellisille joukoille A ja B voimassa

$$|A \setminus B| - |B \setminus A| = |A| - |B| .$$

2. Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Näytä, että kaikilla $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$ on voimassa

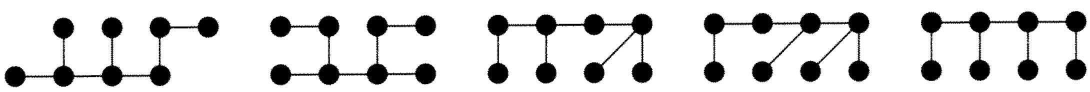
$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B .$$

3. Fibonaccin lukujono $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$.
Osoita induktiolla n:n suhteen, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa:

luku F_{3n} on parillinen ja luvut F_{3n+1} ja F_{3n+2} ovat parittomia.

4. Pöydällä on kymmenen eri esinettä. Monellako eri tavalla Liisa, Eero, Pekka ja Irja voivat jakaa esineet keskenään niin, että Liisa saa 4, Eero 3, Pekka 2 ja Irja yhden esineen?
[Vihje: Sanan LLLLEEEPPI kirjainten uudelleenjärjestelyt]

5. Mitkä seuraavista puista ovat keskenään isomorfisia? Perustele vastauksesi!



Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

3.4.2008

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. (a) Perustele Vennin kaavioiden avulla joukkoyhtälö

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

(b) Olkoot joukot A, B ja C äärellisiä. Johda yhtälö

$$|(A \setminus B) \setminus C| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

2. Määrittelemme kuvauksen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kaavalla

$$f(n,k) = n + (n+k)^2.$$

Osoita, että f on injektio.

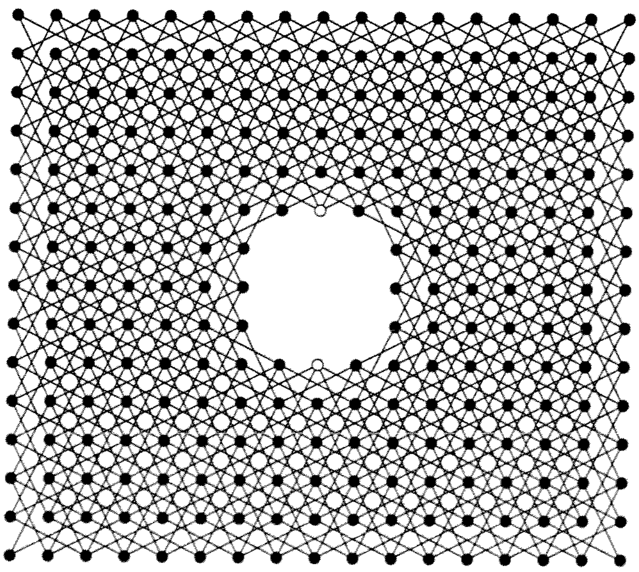
[*Ohje:* Näytä aluksi, että jos $n + k < m + \ell$, niin $f(n,k) < f(m,\ell)$.]

3. Todista induktiolla, että luku $7^n - 1$ on luvulla 6 jaollinen jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

[*Muistutus:* Kokonaisluku k on *jaollinen* kokonaisluvulla $\ell \neq 0$, mikäli $\frac{k}{\ell}$ on kokonaisluku.]

4. Montako eri sanaa voidaan muodostaa järjestelemällä sanan ENNENAIKAINEN kirjaimet uudelleen, kun vaaditaan, että kirjain K ei saa saa olla muodostuvassa sanassa kahden N-kirjaimen välissä? [Siis esim. NIINANKEENANE kelpaa, mutta AINENKNINENEA ei.]

5. Vastaa seuraaviin, vieressä kuvattua verkkoa G koskeviin kysymyksiin:



(a) Mikä on G:n viivojen lukumäärä?

(b_1) Onko G kaksijakoinen?

(b_2) Onko G yhtenäinen?

(b_3) Mikä on kahden valkoisen pisteen etäisyys verkossa G?

Kohta (a): Näytä myös laskut! Kohdissa (b_i) riittää pelkkä vastaus.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

12.6.2008

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Olkoon $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Merkitsemme $\complement A$:lla joukon A komplementtia joukossa X, $\complement B$:lla joukon B komplementtia joukossa Y ja $\complement(A \times B)$:lla joukon $A \times B$ komplementtia tulojoukossa $X \times Y$. Todista joukkoyhtälö

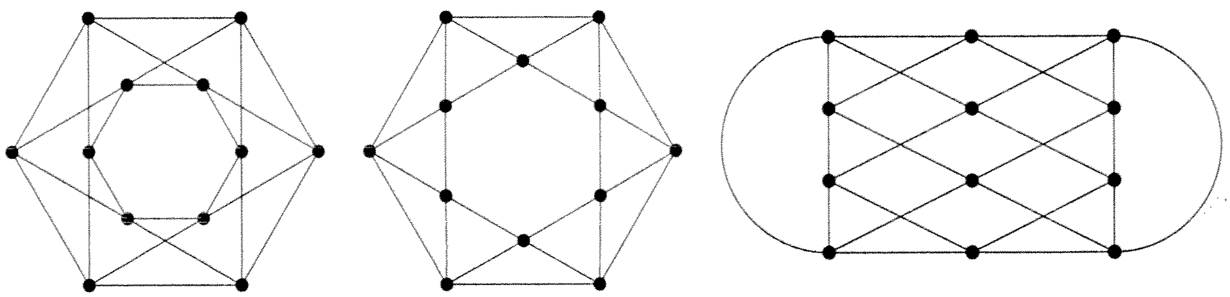
$$\complement(A \times B) = (\complement A \times Y) \cup (X \times \complement B).$$

2. Määrittelemme kuvauksen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla $f(n) = 2n - \min(n, 100)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Perustele vastauksesi seuraaviin kysymyksiin:
   (a) Onko f injektio?
   (b) Onko f surjektio?

3. Fibonaccin lukujono $F_0, F_1, F_2, \ldots$ määritellään rekursiivisesti ehdoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ jokaisella $n \geq 1$. Todista induktiolla, että jokaisella $k \in \mathbb{N}$ on voimassa $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$

4. Montako eri sanaa voimme muodostaa järjestelemällä sanan RAJAVARTIJAT kirjaimet uudelleen, kun vaadimme, että T-kirjaimet eivät saa olla muodostuvassa sanassa vierekkäin. (Siis esim. TAJITRAVAJAR kelpaa, mutta ARJAVARTTIJA ei.)

5. Ovatko mitkään kaksi seuraavista verkoista keskenään isomorfisia? Perustele vastauksesi!



Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

14.8.2008

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

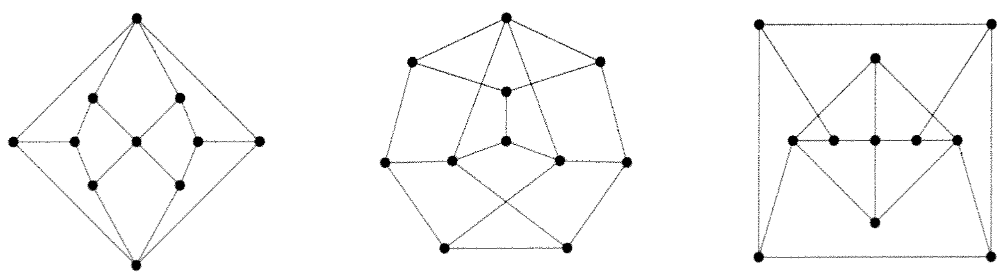
1. Merkitsemme $D\Delta E$:llä joukkojen D ja E *symmetristä erotusta* $(D \setminus E) \cup (E \setminus D)$. Osoita, että äärellisille joukoille D ja E on voimassa $|D\Delta E| = |D| + |E| - 2\,|D \cap E|$.

2. Olkoon X joukko ja $A \subset X$. Näytä, että kaavan $\varphi(E) = E\Delta A$ määrittämä kuvaus $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ on bijektio.
[Ohje: Osoita, että φ on itsensä käänteiskuvaus.]

3. Olkoot k, l ja m positiivisia luonnollisia lukuja ja $n = k + l + m$. Näytä, että on voimassa multinomikerrointen välinen yhtälö
$$\binom{n}{k\ l\ m} = \binom{n-1}{k-1\ l\ m} + \binom{n-1}{k\ l-1\ m} + \binom{n-1}{k\ l\ m-1}.$$

4. Merkitsemme φ:llä "kultaista lukua" $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja merkitsemme edelleen $a_n = \varphi^n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Osoita induktiolla, että jokaisella $n > 0$ on voimassa yhtälö $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.

5. Selitä, mikseivät mitkään kaksi alla kuvatusta kolmesta verkosta ole keskenään isomorfiset.



Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Johdatus diskreettiin matematiikkaan

21.10.2008

Merkitse jokaiseen vastauspaperiisi sekä nimesi että henkilö- tai opiskelijatunnuksesi.

1. Onko kaikille joukoille A, B ja C voimassa yhtälö

$$\big(A \setminus (B \cap C)\big) \cap \big(B \setminus (A \cap C)\big) \cap \big(C \setminus (A \cap B)\big) = \emptyset \ ?$$

Perustele vastauksesi.

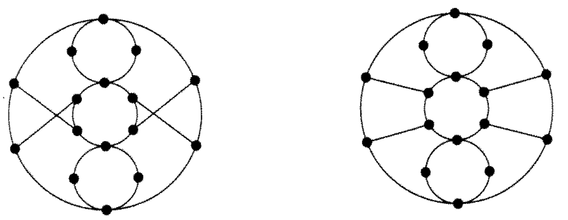
2. Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Osoita, että kaikilla $A \subseteq X$ ja $B \subseteq Y$ on voimassa

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B \ .$$

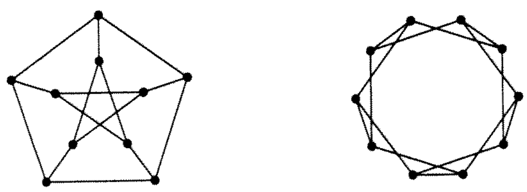
3. Montako eri sanaa voidaan muodostaa järjestelemällä sanan KÄÄNTEENTEKEVÄ kirjaimet uudelleen, kun vaaditaan, että muodostuvassa sanassa *ei* saa olla kahta vierekkäistä Ä-kirjainta?

4. Selitä, miksi alla kohdissa a) ja b) annetut kaksi verkkoa *eivät* ole keskenään isomorfiset.

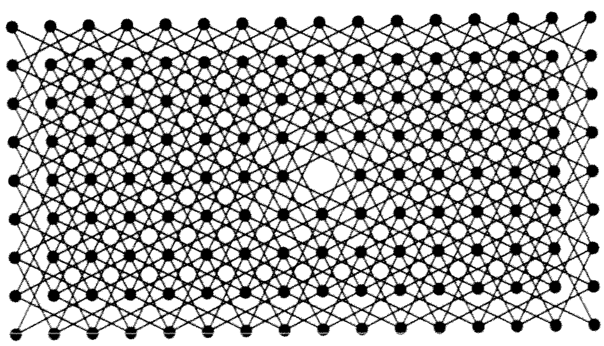
(a)



(b)



5. Laske viereisen verkon viivojen lukumäärä. Pelkkä vastaus ei riitä, näytä myös laskut!



Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus Diskreettiin Matematiikkaan
Kurssikoe 12.12.2008
Laatija: Petteri Harjulehto

1. Osoita, että kaikille joukoille A, B ja C on voimassa

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

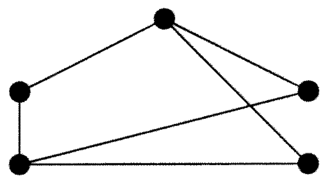
Pelkkä kuvio ei riitä perusteluksi.

2. Määrittele käsitteet relaatio ja kuvaus. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mitkä seuraavista joukoista määrittelevät joukon A relaation ja mitkä kuvauksen $A \to A$?
(a) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)}
(b){(1,2), (2,1), (3,4), (4,5) (5,5)}
(c){(1,2), (2,2), (3,3) (4,3)}
(d){(1,2), (2,2), (3,3) (4,3), (5,3)}

3. Olkoon $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Osoita, että kaikille luonnollisille luvuille $n \geq 1$ pätee

$$2 + 2q + \cdots + 2q^{n-1} = \frac{2(1 - q^n)}{1 - q}.$$

4. Määrittele käsite isomorfiset verkot. Alla on kuva verkosta. Anna esimerkki verkosta, joka
(a) on sen kanssa isomorfinen;
(b) ei ole sen kanssa isomorfinen.



Muista huolellisesti perustella vastauksesi!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus Diskreettiin Matematiikkaan
Loppukoe 22.1.2009
Laatija: Petteri Harjulehto

1. Osoita, että kaikille joukoille A, B ja C on voimassa

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Pelkkä kuvio ei riitä perusteluksi.

2. Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $A, B \subset X$. Osoita, että
(a) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ ja
(b) $R(A \setminus B) \supset R(A) \setminus R(B)$.
Pelkkä kuvio ei riitä perusteluksi.

3. Olkoot A ja B äärellisiä erillisiä joukkoja. Osoita, että

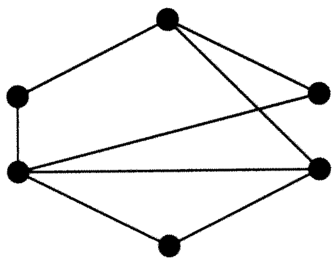
$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

4. Osoita induktiolla, että

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

5. Määrittele käsite isomorfiset verkot. Alla on kuva verkosta. Anna esimerkki verkosta, joka
(a) on sen kanssa isomorfinen;
(b) ei ole sen kanssa isomorfinen ja jossa on yhtä monta pistettä kuin kuvan verkossa.



Muista perustella huolellisesti vastauksesi!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus Diskreettiin Matematiikkaan
Loppukoe 2.4.2009
Laatija: Petteri Harjulehto

1. Osoita, että kaikille joukoille A, B ja C on voimassa

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Pelkkä kuvio ei riitä perusteluksi.

2. Olkoot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ bijektioita. Osoita, että yhdistetty kuvaus $h : X \to Z$, $h(x) = g(f(x))$, on bijektio.

3. Osoita induktiolla, että

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

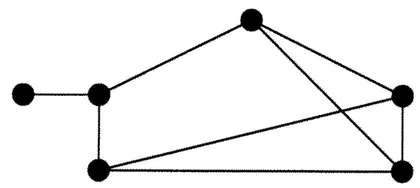
kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

4. Määrittele binomikerroin $\binom{n}{k}$ osajoukkojen lukumäärän avulla ja todista Pascalin identiteetti

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

kun $0 < k < n$.

5. Määrittele käsite isomorfiset verkot. Alla on kuva verkosta. Anna esimerkki verkosta, joka
(a) on sen kanssa isomorfinen;
(b) ei ole sen kanssa isomorfinen, ja jossa on yhtä monta pistettä kuin kuvan verkossa.



Muista perustella huolellisesti vastauksesi!

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus Diskreettiin Matematiikkaan
Loppukoe 11.6.2009
Laatija: Petteri Harjulehto

1. Osoita, että kaikille joukoille A, B ja C on voimassa

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

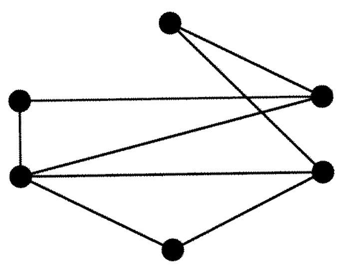
Pelkkä kuvio ei riitä perusteluksi.

2. Olkoot $R \subset X \times Y$ ja $A, B \subset X$. Osoita, että
(a) $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$ ja
(b) $R(A \setminus B) \supset R(A) \setminus R(B)$.
Pelkkä kuvio ei riitä perusteluksi.

3. Osoita, että kuvaus $f : X \to Y$ on injektio, jos ja vain jos $f^{-1}(f(A)) = A$ kaikilla $A \subset X$.

4. Todista induktiolla, että $2^n \leq n!$ kaikille luonnollisille luvuille $n \geq 4$.

5. Määrittele käsite isomorfiset verkot. Alla on kuva verkosta. Anna esimerkki verkosta, joka
(a) on sen kanssa isomorfinen;
(b) ei ole sen kanssa isomorfinen ja jossa on yhtä monta pistettä kuin kuvan verkossa.



Muista perustella huolellisesti vastauksesi!