Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
Loppukoe
19.12.2007

**1.** Todista seuraava *(Banachin) kiintopistelause:* Olkoon $X$ täydellinen metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ kuvaus. Oletetaan, että on olemassa sellainen vakio $L \in \mathbb{R}$, $0 \leq L < 1$, että

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste $x_0 \in X$, jolle pätee $f(x_0) = x_0$.

**2.** Olkoot $M$, $N$, ja $L$ differentioituvia monistoja sekä $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to L$ $C^\infty$-kuvauksia. Osoita, että

$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$$

kaikilla $p \in M$.

**3.** Olkoon $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ja $\theta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$,

$$\theta\big(t, (x, y)\big) = \theta_t(x, y) = \big(xe^{2t}, ye^{-3t}\big).$$

Osoita, että $\theta$ on virtaus ja määrää sen synnyttäjä (engl. infinitesimal generator).

**4.** Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ sileä differentiaali 1-muoto ja olkoot $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ sileitä vektorikenttiä. Osoita, että

$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big).$$

**5.** Olkoon $X \in \mathcal{T}(M)$ sekä $\omega$ ja $\eta$ sileitä differentiaalimuotoja. Osoita, että

$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta).$$