Matematiikan laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
Loppukoe
21.01.2003

1. Olkoon M differentioituva monisto ja $p \in M$.
   (a) Määrittele käsitteet *tangenttivektori pisteessä* $p \in M$ ja *tangenttiavaruus pisteessä* $p \in M$.
   (b) Olkoon N toinen differentioituva monisto ja $f\colon M \to N$ C^∞-kuvaus. Määrittele f:n tangenttikuvaus pisteessä $p \in M$.

2. (a) Määrittele sileitten vektorikenttien $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ Lien hakatulo $[X, Y]$.
   (b) Laske $[V, W]$, kun
$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ja} \quad W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$
   ovat sileitä vektorikenttiä $\mathbb{R}^3$:ssa.

3. Olkoon $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ja $\theta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$,
$$\theta\big(t, (x, y)\big) = \theta_t(x, y) = \big(xe^{2t}, ye^{-3t}\big).$$
   Osoita, että θ on virtaus ja määrää sen synnyttäjä (engl. infinitesimal generator).

4. Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus.
   (a) Määrittele käsitteet *k-kovariantti tensori V:llä* ja *alternoiva k-kovariantti tensori V:llä.*
   (b) Määrittele niin sanottu *alternointi* $\mathrm{Alt}\colon T^k(V) \to \Lambda^k(V)$.
   [Tässä $T^k(V)$ on k-kovarianttien tensoreiden vektoriavaruus ja $\Lambda^k(V)$ on alternoivien k-kovarianttien tensoreiden vektoriavaruus.]
   (c) Määrittele tensoreiden $T \in T^k(V)$ ja $S \in T^l(V)$ *ulkoinen tulo* $T \wedge S \in \Lambda^{k+l}(V)$.

5. Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ sileä differentiaali 1-muoto ja olkoot $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ sileitä vektorikenttiä. Osoita, että
$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
Loppukoe
20.12.2006

1. Todista seuraava *(Banachin) kiintopistelause:* Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $f\colon X \to X$ kuvaus. Oletetaan, että on olemassa sellainen vakio $L \in \mathbb{R}$, $0 \leq L < 1$, että
$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$
kaikilla $x, y \in X$. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste $x_0 \in X$, jolle pätee $f(x_0) = x_0$.

2. Olkoot M, N ja L differentioituvia monistoja sekä $f\colon M \to N$ ja $g\colon N \to L$ C^∞-kuvauksia. Osoita, että
$$(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$$
kaikilla $p \in M$.

3. Olkoon $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ja $\theta\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$,
$$\theta\big(t, (x, y)\big) = \theta_t(x, y) = \big(xe^{2t}, ye^{-3t}\big).$$
Osoita, että θ on virtaus ja määrää sen synnyttäjä (engl. infinitesimal generator).

4. Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ sileä differentiaali 1-muoto ja olkoot $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ sileitä vektorikenttiä. Osoita, että
$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big).$$

5. Olkoon $X \in \mathcal{T}(M)$ sekä ω ja η sileitä differentiaalimuotoja. Osoita, että
$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
25.1.2007

1. Olkoon M differentioituva monisto ja $p \in M$.
(a) Määrittele käsitteet *tangenttivektori pisteessä* $p \in M$ ja *tangenttiavaruus pisteessä* $p \in M$.
(b) Olkoon N toinen differentioituva monisto ja $f\colon M \to N$ C^∞-kuvaus. Määrittele f:n tangenttikuvaus pisteessä $p \in M$.

2. (a) Määrittele sileitten vektorikenttien $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ Lien hakatulo $[X, Y]$ ja osoita, että $[X, Y] \in \mathcal{T}(M)$.
(b) Laske $[V, W]$, kun

$$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ja} \quad W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$$

ovat sileitä vektorikenttiä $\mathbb{R}^3$:ssa.

3. Olkoon $V \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ vektorikenttä

$$V = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Määrää V:n virtaus $\theta\colon \mathcal{D}(V) \to \mathbb{R}^2$. Onko V täydellinen?

4. Olkoon $T \in T^k(V)$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(a) $T \in \Lambda^k(V)$.
(b) $T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)T(v_1, \ldots, v_k)$ kaikilla $v_1, \ldots, v_k \in V$ ja kaikilla permutaatioilla $\sigma \in S_k$.
(c) T häviää aina kun kaksi sen argumenteista ovat samoja, ts.

$$T(v_1, \ldots, w, \ldots, w, \ldots, v_k) = 0.$$

5. Olkoon $X \in \mathcal{T}(M)$ sekä ω ja η sileitä differentiaalimuotoja. Osoita, että

$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus differentiaaligeometriaan
14.6.2007

1. Olkoon M differentioituva n-monisto ja $p \in M$.

(a) Määrittele käsitteet *tangenttivektori pisteessä* $p \in M$ ja *tangenttiavaruus pisteessä* $p \in M$.

(b) Osoita, että tangenttiavaruus T_pM on n-ulotteinen vektoriavaruus.

2. (a) Määrittele sileitten vektorikenttien $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ Lien hakatulo $[X, Y]$.

(b) Laske $[V, W]$, kun

$$V = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y} \text{ja} \quad W = \frac{\partial}{\partial y}$$

ovat sileitä vektorikenttiä $\mathbb{R}^3$:ssa.

3. Olkoon $V \in \mathcal{T}(M)$ sileä vektorikenttä ja γ sellainen V:n integraalikäyrä, jonka maksimaalinen määrittelyväli I ei ole koko $\mathbb{R}$. Osoita, ettei γ:n jälki $\gamma(I)$ voi sisältyä mihinkään M:n kompaktiin osajoukkoon.

4. Olkoon $V \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ vektorikenttä

$$V = (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Määrää V:n virtaus $\theta \colon \mathcal{D}(V) \to \mathbb{R}^2$. Onko V täydellinen?

5. Olkoon $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ sileä differentiaali 1-muoto ja olkoot $X \in \mathcal{T}(M)$ ja $Y \in \mathcal{T}(M)$ sileitä vektorikenttiä. Osoita, että

$$d\omega(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega\big([X, Y]\big).$$