Introduktion till sannolikhetslära

Slutförhör 24.10.2006

1. En kortlek fördelas jämnt mellan fyra spelare. Vilken är sannolikheten att någon av spelarna får tre äss? (En kortlek har 52 kort, varav fyra äss.)

2. Bland 100 lotter finns 5 vinstlotter. Av lotterna väljs på måfå efter varandra två lotter. Vilken är sannolikheten att den andra lotten är en vinstlott, då man vet att den första lotten var en vinstlott?

3. Låt X vara Tas(a, b)-fördelad. Beräkna dess väntevärde och varians.

4. Den tid som en kund tillbringar i en bank är exponentiellt fördelad. Kunderna dröjer i banken i medeltal 10 minuter. a) Vilken är sannolikheten att en kund dröjer åtminstone 15 minuter? b) Viken är sannolikheten att en kund som dröjt en halv timme i banken dröjer där åtminstone 15 minuter till?

5. a) Sök en konstant c så att följande funktion är en frekvensfunktion:

$$f(x) = \frac{c}{x^3} \text{ då } x > 1, \quad f(x) = 0 \text{ då } x \leq 1.$$

b) Konstruera en stokastisk variabel X, som har ovanstående $f(x)$ som sin frekvensfunktion.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Institutionen för matematik och statistik
Inledning i sannolikhetslära
Kursprov 5.3.2007

1. Herr K har i sitt skåp tre, fyra eller fem olika par sockor, tre med sannolikheten $\frac{1}{3}$, fyra med sannolikheten $\frac{7}{15}$ och fem med sannolikheten $\frac{1}{5}$.
   a) Med vilken sannolikhet är sockorna som K slumpmässigt i morgondunklet tar på sig av samma par?
   b) Senare på dagen märker K att de sockor han valt inte är av samma par. Givet detta, vad är den villkorliga sannolikheten för att det fanns fem par sockor i skåpet?

2. Livslängden för ett par skidor följer den exponentiella fördelningen, och väntevärdet är 5 år. Fru Streng fick nya skidor till jul, och började använda dem från början av 2007. Vad är sannolikheten för att hon använder skidorna
   a) efter år 2010,
   b) efter år 2010, givet att hon använder dem i början av 2010?

3. Den statistiska sannolikheten för att ett barn som föds är en pojke är 0,512. I en stad föds 1000 barn per år. Beräkna genom att använda normalapproximation ett närmevärde för sannolikheten att antalet pojkar är större än antalet flickor.

Svara på *endast en* av uppgifterna 4A och 4B. Om du returnerar ett papper med svar på båda utan att välja vilken skall beaktas, så beaktas den som har lägre poäng.

4A. Låt A, samt B_1 och B_2 vara sådana händelser i sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, att $A \perp\!\!\!\perp B_i$, $i = 1, 2$. Visa att om $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, så är $A \perp\!\!\!\perp (B_1 \cup B_2)$.

4B. Definera en funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genom

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^{-3}e^{-y}, & x > 1,\ y > 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Visa att f är täthetsfunktionen för en kontinuerlig sannolikhetsfördelning. Antag att f är täthetsfunktion för det kontinuerligt fördelade stokastiska variabelparet (X, Y). Är X och Y oberoende? Är de korrelationsfria?

Svara på kursförfrågan

`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/index.sv.html`

genast efter tenten!