Integraaliyhtälöt/ Integral equations

Koe/ Exam 19.12.2006

1. (Laskareista/ From Homework) Ratkaise yhtälö/ Solve the integral equation
$$x = \phi(x) + \int_0^x (x-y)\,\phi(y)\,dy.$$

2. Olkoon H Hilbertin avaruus, ja M sen aliavaruus. Osoita, että M:n sulkeumalle $\overline{M}$ pätee
$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$
Let H be a Hilbert space, and M a subspace. Show that the closure $\overline{M}$ of M satisfies
$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$

3. Määritellään lineaarikuvaus $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ kaavalla
$$T_t\Phi(x) = \phi(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, \phi \in L^2(\mathbb{R}). \tag{0.1}$$
Määrää $\|T_t\|$ ja T_t^*.

   Define a linear map $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ by the formula (0.1) above. Determine $\|T_t\|$ and T_t^*.

4. Olkoon $K : H \to H$ kompakti, $A : H \to H$ rajoitettu ja H Hilbertin avaruus. Osoita, että operaattorit AK ja KA ovat kompakteja

   Let $K : H \to H$ be compact, $A : H \to H$ bounded and H be a Hilbert–space. Show that AK and KA are compact.

5. Oletetaan että H on Hilbertin avaruus ja $A : H \to H$ on lineaarinen ja rajoitettu ja $\|A\| < 1$. Osoita, että $I + A$ on kääntyvä ja määrää sen käänteisoperaattori.

   Assume H is a Hilbert space, and $A : H \to H$ is bounded and linear with $\|A\| < 1$. Show that $I + A$ is invertible and determine its inverse.

Integraaliyhtälöt/ Integral equations

Koe/ Exam 20.12.2006

1. Kerro, mikä on projektioteoreeman sisälto? Osoita, että ortogonaaliprojektio P aliavaruudelle M toteuttaa $(Px, y) = (x, Py)$ kaikilla x, $y \in H$.

   Give the claim of the projection theorem. Show that the orthogonal-projection P to the subspace M satisfies $(Px, y) = (x, Py)$ for all x, $y \in H$.

2. Olkoon M Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus, ja $\lambda : M \to \mathbb{C}$ rajoitettu lineaarinen M:n funktionaali. Osoita, että on olemassa H:n lineaarinen funktionaali μ siten että μ:n rajottuma aliavaruuteen M on λ ja $\|\mu\| = \|\lambda\|$.

   Let M be a closed subspace of a Hilbert space H, and $\lambda : M \to \mathbb{C}$ a bounded linear functional of M. Show that there exists a bounded linear functional μ such that the restriction of μ to M is λ and $\|\mu\| = \|\lambda\|$.

3. Tarkastellaan integraaliyhtälöa

$$f(x) + \frac{1}{100}\int_0^1 e^{-|xy|} f(y)\, dy = \sin x. \tag{0.1}$$

   Osoita että tällä on yhksikäsitteinen ratkaisu avaruudessa $L^2([0,1])$.

   Show that the equation (0.1) above has a unique solution f in $L^2([0,1])$,

4. Olkoon $K : H \to H$ kompakti, ja H Hilbertin avaruus. Osoita, että operaattorin $I+K$ ydin on äärellisulotteinen. Vihje: voit pitää tunnettuna, että kompaktit operaattorit ovat äärellisulotteisten operaattorien normirajoja.

   Let $K : H \to H$ be compact, and H be a Hilbert–space. Show that the kernel of the operator $I + K$ is finite dimensional. Hint: use the fact that compact operators are norm limits of finite dimensional operators.

5. Muotoile ja todista Schurin lemma. State and prove Schur's lemma.