Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Integraaliyhtälöt
Loppukoe
25.3.2004

1. Ratkaise integraaliyhtälö

$$\phi(x) - 3\int_0^1 x^3y^2\phi(y)dy = 2x + 1.$$

2. Osoita, että yhtälöllä

$$\phi(x) - \lambda\int_0^1 \cos^3(2 + \log(1 + x^2y^2))\sin(\phi(y) + 1)dy = f(x)$$

on $L^2[0,1]$:ssä yksikäsitteinen ratkaisu, kun $f \in L^2[0,1]$ ja $|\lambda| < 1$.

3. Määrittele seuraavat integraalioperaattoria koskevat käsitteet
   a) adjungoitu
   b) itseadjungoitu
   c) degeneroitunut
   d) kompakti
   e) positiivinen
   sekä anna kustakin esimerkki.

4. Olkoon K integraalioperaattori

$$Kf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy,$$

missä ydin $K(x,y)$ on L^2–ydin, jolle $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Osoita, että jos K:lla on vain äärellinen määrä nollasta poikkeavia ominaisarvoja, niin K on degeneroitunut operaattori.

5. Olkoon K $L^2[a,b]$:n kompakti itseadjungoitu operaattori, jolla on ortonormitetut ominaisvektorit $\{\phi_n\}$ ja ominaisarvot $\{\mu_n\}$ ja olkoon $f \in L^2[a,b]$. Osoita, että yhtälöllä

$$\phi - \lambda K\phi = f$$

on muotoa

$$\phi = f + \sum_1^\infty a_m\phi_n$$

oleva ratkaisu, jos $\lambda\mu_n \neq 1$. Johda esitys kertoimille a_n.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Integraaliyhtälöt
Loppukoe
16.12.2004

1. Ratkaise integraaliyhtälö

$$\phi(x) - 3\int_0^1 (x^2y^2 + x)\phi(y)dy = x + 1.$$

2. Osoita, että integraaliyhtälölle

$$\phi(x) - \lambda\int_0^1 \sin^2(1 + e^{xy})\phi(y)dy = f(x)$$

   on $L^2[0,1]$:ssa yksikäsitteinen ratkaisu, kun $f \in L^2[0,1]$ ja $|\lambda| < 1$.

3. Tarkastellaan $L^2[0,1]$:n integraalioperaattoria K,

$$Kf(x) = \int_0^1 a(x)\overline{a}(y)f(y)dy,$$

   missä $a \in L^2[0,1]$. Osoita, että K on itseadjungoitu ja määrää jokin K:n ominaisarvo.

4. Määrittele, mitä tarkoitetaan positiivisella operaattorilla ja anna jokin esimerkki positiivisesta integraalioperaattorista.

5. Olkoon K Hilbert–avaruuden H kompakti itseadjungoitu operaattori, jolla on ortonormitetut ominaisvektorit $\{\phi_n\}$ ja ominaisarvot $\{\mu_n\}$. Osoita, että jos $N(K) = \{0\}$, niin yhtälöllä

$$K\phi = f$$

   on yksikäsitteinen ratkaisu jos ja vain jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-2}|\langle f, \phi_n\rangle|^2 < \infty.$$

Matematiikan laitos
Integraaliyhtälöt
Loppukoe
7.3.2006

1. Ratkaise integraaliyhtälö

$$\phi(x) - 5\int_0^1 (x^3y^2 + xy)\phi(y)dy = x + 1.$$

2. Osoita, että epälineaarisella integraaliyhtälöllä

$$\phi(x) - \lambda\int_0^1 \cos^4(1 + x^2 + y^2)\sin(1 + \phi(y))dy = f(x)$$

on $L^2[0,1]$:ssä yksikäsitteinen ratkaisu, kun $f \in L^2[0,1]$ ja $|\lambda|$ on kyllin pieni. Arvioi, kuinka suuri $|\lambda|$ voi olla ratkeavuuden häiriintymättä.

3. Tarkastellaan $L^2[0,1]$:n operaattoria K,

$$Kf(x) = \int_0^1 a(x)\overline{a}(y)f(y)dy,$$

missä $a \in L^2[0,1]$. Osoita, että K on itseadjungoitu ja määrää K:n ominaisarvot.

4. Olkoot A ja B Hilbert avaruuden H itseadjungoituja, positiivisia ja rajoitettuja operaattoreita, joille $AB = BA$. Osoita, että AB on positiivinen operaattori.

5. Olkoon K kompakti itseadjungoitu operaattori $L^2[0,1]$:ssä. Olkoon $\{\phi_n\}$ K:n ortonormitetut ominaisvektorit ja $\{\mu_n\}$ vastaavat ominaisarvot. Johda ratkaisu yhtälölle

$$\phi - \lambda K\phi = f$$

kun $f \in L^2[0,1]$ ja
a) $\lambda\mu_n \neq 1 \;\; \forall n$
b) $\lambda\mu_n = 1$ joillain arvoilla n.

Matematiikan laitos
Integraaliyhtälöt
Loppukoe
9.8.2006

1. Ratkaise integraaliyhtälö

$$\phi(x) - 3\int_0^1 (x^2y + x)\phi(y)dy = 2.$$

2. Olkoon K kompakti operaattori Hilbert–avaruudessa H ja $\{f_n\}$ vapaa joukko ominaisarvoa $\mu \neq 0$ vastaavia ominaisvektoreita. Osoita, että $\{f_n\}$ on äärellinen.

3. Määrittele seuraavat integraalioperaattoria koskevat käsitteet
   a) itseadjungoitu
   b) degeneroitunut
   c) positiivinen
   sekä anna kustakin esimerkki.

4. Määritä $L^2[0,1]$:ssa määritellyn operaattorin K,

$$Kf(x) = \int_0^1 e^{2(x+y)} f(y)dy$$

   ominaisarvot.

5. Esitä Fredholmin vaihtoehtolause Fredholmin integraaliyhtälölle

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x),$$

   missä $K(x,y)$ on L^2–ydin ja $f \in L^2[a,b]$. Hahmottele lauseen todistus olettaen, että tulos pätee degeneroituneille ytimille.

Integraaliyhtälöt/ Integral equations

Koe/ Exam 19.12.2006

1. (Laskareista/ From Homework) Ratkaise yhtälö/ Solve the integral equation
$$x = \phi(x) + \int_0^x (x-y)\,\phi(y)\,dy.$$

2. Olkoon H Hilbertin avaruus, ja M sen aliavaruus. Osoita, että M:n sulkeumalle $\overline{M}$ pätee
$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$
Let H be a Hilbert space, and M a subspace. Show that the closure $\overline{M}$ of M satisfies
$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$

3. Määritellään lineaarikuvaus $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ kaavalla
$$T_t\Phi(x) = \phi(x+t), \quad x \in \mathbb{R}, \phi \in L^2(\mathbb{R}). \tag{0.1}$$
Määrää $\|T_t\|$ ja T_t^*.

   Define a linear map $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ by the formula (0.1) above. Determine $\|T_t\|$ and T_t^*.

4. Olkoon $K : H \to H$ kompakti, $A : H \to H$ rajoitettu ja H Hilbertin avaruus. Osoita, että operaattorit AK ja KA ovat kompakteja

   Let $K : H \to H$ be compact, $A : H \to H$ bounded and H be a Hilbert–space. Show that AK and KA are compact.

5. Oletetaan että H on Hilbertin avaruus ja $A : H \to H$ on lineaarinen ja rajoitettu ja $\|A\| < 1$. Osoita, että $I + A$ on kääntyvä ja määrää sen käänteisoperaattori.

   Assume H is a Hilbert space, and $A : H \to H$ is bounded and linear with $\|A\| < 1$. Show that $I + A$ is invertible and determine its inverse.

Integraaliyhtälöt/ Integral equations

Koe/ Exam 20.12.2006

1. Kerro, mikä on projektioteoreeman sisälto? Osoita, että ortogonaaliprojektio P aliavaruudelle M toteuttaa $(Px, y) = (x, Py)$ kaikilla x, $y \in H$.

   Give the claim of the projection theorem. Show that the orthogonal-projection P to the subspace M satisfies $(Px, y) = (x, Py)$ for all x, $y \in H$.

2. Olkoon M Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus, ja $\lambda : M \to \mathbb{C}$ rajoitettu lineaarinen M:n funktionaali. Osoita, että on olemassa H:n lineaarinen funktionaali μ siten että μ:n rajottuma aliavaruuteen M on λ ja $\|\mu\| = \|\lambda\|$.

   Let M be a closed subspace of a Hilbert space H, and $\lambda : M \to \mathbb{C}$ a bounded linear functional of M. Show that there exists a bounded linear functional μ such that the restriction of μ to M is λ and $\|\mu\| = \|\lambda\|$.

3. Tarkastellaan integraaliyhtälöa

$$f(x) + \frac{1}{100}\int_0^1 e^{-|xy|} f(y)\,dy = \sin x. \tag{0.1}$$

   Osoita että tällä on yhksikäsitteinen ratkaisu avaruudessa $L^2([0,1])$.

   Show that the equation (0.1) above has a unique solution f in $L^2([0,1])$,

4. Olkoon $K : H \to H$ kompakti, ja H Hilbertin avaruus. Osoita, että operaattorin $I+K$ ydin on äärellisulotteinen. Vihje: voit pitää tunnettuna, että kompaktit operaattorit ovat äärellisulotteisten operaattorien normirajoja.

   Let $K : H \to H$ be compact, and H be a Hilbert–space. Show that the kernel of the operator $I + K$ is finite dimensional. Hint: use the fact that compact operators are norm limits of finite dimensional operators.

5. Muotoile ja todista Schurin lemma. State and prove Schur's lemma.

Integraaliyhtälöt

Koe 06.03.2007

1. Oletetaan että $h \in C([a,b])$ toteuttaa homogeenisen toisenlajin Volterra–yhtälön
$$h(x) = \int_a^x K(x,y)\, h(y)\, dy, \qquad a < x < b.$$
Osoita, että $h = 0$.

2. Olkoot H_1 ja H_2 Hilbert–avaruuksia, ja $A : H_1 \to H_2$ lineaarinen kuvaus. Osoita, että A on jatkuva jos ja vain jos se on rajoitettu.

3. Olkoon H Hilbert–avaruus, ja A, $B : H \to H$ rajoitettuja lineaarikuvauksia, jotka kommutoivat, eli $AB = BA$. Oletetaan, että AB on kääntyvä. Osoita, että myös A ja B ovat kääntyviä.

4. Osoita, että integraaliyhtälöllä
$$u(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{25}\int_0^1 e^{-(x-y)^2}\, u(y)\, dy$$
on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in L^2([0,1])$.

5. Olkoon $K : H \to H$ kompakti, $A : H \to H$ rajoitettu ja H Hilbertin avaruus. Osoita, että operaattorit AK ja KA ovat kompakteja.

Integraaliyhtälöt

Koe 12.4.2007

1. Kerro, mikä on projektioteoreeman sisälto? Määritä ortogonaaliprojektion P normi.

2. (Luennoista) Muotoile ja todista *Rieszin esityslause.*

3. Tarkastellaan integraaliyhtälöa

$$f(x) + \frac{1}{20}\int_0^1 e^{-|xy|^2}\sin(x^2+y^2)f(y)\,dy = \sin x. \tag{0.1}$$

   Osoita että tällä on yhksikäsitteinen ratkaisu avaruudessa $L^2([0,1])$.

4. Olkoon H Hilbert–avaruus, ja $A : H \to H$ lineaarinen kuvaus, jolle jollain positiivisella kokonaisluvulla n pätee $\|A^n\| < 1$. Osoita, että $I - A$ on kääntyvä ja määrää sen käänteisoperaattori.

5. Muotoile ja todista *Schurin lemma.*