Hyperreaaliluvut 3 ov, 16.12.2004

1. Mitä tarkoitetaan sillä, että järjestetty kunta $\mathbf{K}$ täyttää Arkhimedeen ehdon? Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä järjestetylle kunnalle $\mathbf{K}$:
(i) $\mathbf{K}$ täyttää Arkhimedeen ehdon;
(ii) $\mathbf{N}$ on ylhäältä rajoittamaton $\mathbf{K}$:ssa (kun luonnollisten lukujen joukko $\mathbf{N}$ tulkitaan luonnollisella tavalla $\mathbf{K}$:n osajoukoksi);
(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;
(iv) aina, kun $a < b$, on olemassa $q \in \mathbf{Q}_{\mathbf{K}}$, jolle $a < q < b$. (Tässä $\mathbf{Q}_{\mathbf{K}}$ on joukon $\mathbf{N}$ virittämä $\mathbf{K}$:n alikunta eli kaikkien $\mathbf{N}$:n sisältävien $\mathbf{K}$:n alikuntien leikkaus.)

2. (a) Miten määritellään filtteri ja ultrafiltteri (joukossa X)? Miten määritellään kiinnitetty ja vapaa filtteri?
(b) Todista: Jos $\mathcal{F}$ on filtteri joukossa X, niin $\mathcal{F}$:llä on hienonnus, joka on ultrafiltteri.
(c) Todista: Jos X on ääretön joukko, niin X:ssä on vapaa ultrafiltteri. Voiko äärellisessä joukossa olla vapaata filtteriä?

3. Miten määritellään äärellisten hyperreaalilukujen joukko ${}^*\mathbf{R}_f$ ja infinitesimaalisten hyperreaalilukujen joukko ${}^*\mathbf{R}_0$? Miten määritellään äärellisen hyperreaaliluvun x standardiosa $\mathrm{st}(x)$? Osoita, että äärellisen hyperreaaliluvun standardiosa on yksikäsitteisenä olemassa.

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$.
(a) Todista käyttämättä siirtoperiaatetta: Funktio $f : A \to \mathbf{R}$ on jatkuva pisteessä $a \in A$, jos ja vain jos ${}^*f(x) \approx f(a)$ aina, kun $x \in {}^*A$ on sellainen, että $x \approx a$.
(b) Todista (a)-kohdan väite siirtoperiaatteen avulla.

5. (a) Miten määritellään Mostowskin romautusfunktio?
(b) Osoita, että Mostowskin romautusfunktio on injektio.

HYPERREAALILUVUT 3 OV, 20.1.2005

1. (a) Miten määritellään filtteri, filtterikanta ja ultrafiltteri (joukossa X)?
(b) Osoita, että filtterille $\mathcal{F}$ joukossa X seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(i) $\mathcal{F}$ on ultrafiltteri;
(ii) jokaiselle $A \subset X$ on joko $A \in X$ tai $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

2. (a) Selitä pääpiirteittäin reaalilulukujoukon $\mathbf{R}$ konstruktio ja sen rakenteen määrittely järjestettynä kuntana Cantorin menetelmällä lähtien rationaalilukujen kunnasta $\mathbf{Q}$. Mainitse tärkeimmät aputulokset (ilman todistusta).
(c) Osoita, että järjestetyssä kunnassa $\mathbf{R}$ on voimassa Arkhimedeen ehto.
(d) Onko Arkhimedeen ehto voimassa hyperreaalilukujen järjestetyssä kunnassa $^*\mathbf{R}$? Miksi?

3. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $a \in \mathbf{R}$ ($\subset {}^*\mathbf{R}$).
(a) Miten määritellään hyperreaaliluvun x monadi?
(b) Osoita, että A on pisteen a ympäristö, jos ja vain jos a:n monadi monad(a) sisältyy A:n epästandardiin laajennukseen $^*A$.
(HUOM! Tässä pisteen ympäristöllä tarkoitetaan joukkoa, joka sisältää kyseisen pisteen sisältävän avoimen joukon. Ympäristö ei siis välttämättä ole avoin.)

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ kompakti joukko ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Osoita hyperreaalilukujen teorian avulla, että f on tasaisesti jatkuva.

5. (a) Miten määritellään superstruktuuri $V(\mathbf{R})$ yli $\mathbf{R}$:n? Miten määritellään rajoitettu ultrapotenssi $\Pi^0_{\mathcal{U}} V(\mathbf{R})$, missä $\mathcal{U}$ on ultrafiltteri $\mathbf{N}$:ssä?
(b) Määrittele Mostowskin romautusfunktio $M : \Pi^0_{\mathcal{U}} V(\mathbf{R}) \to V(^*\mathbf{R})$ ja osoita, että se on injektio.

HYPERREAALILUVUT 3 OV, 19.5.2005

1. (a) Miten määritellään filtteri, filtterikanta ja ultrafiltteri (joukossa X)?
(b) Osoita, että filtterille $\mathcal{F}$ joukossa X seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(i) $\mathcal{F}$ on ultrafiltteri;
(ii) jokaiselle $A \subset X$ on joko $A \in X$ tai $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
(c) Anna esimerkki filtteristä joka ei ole ultrafiltteri.

2. Miten määritellään äärellisten hyperreaalilukujen joukko ${}^*\mathbf{R}_f$ ja infinitesimaalisten hyperreaalilukujen joukko ${}^*\mathbf{R}_0$? Miten määritellään äärellisen hyperreaaliluvun x standardiosa $\mathrm{st}(x)$? Osoita, että äärellisen hyperreaaliluvun standardiosa on yksikäsitteisenä olemassa.

3. Esitä ja todista lause, joka antaa hyperreaalilukujen teoriaa käyttävän karakterisoinnin pisteen a ympäristössä $U \subset \mathbf{R}$ määritellyn reaaliarvoisen funktion f derivaatan $f'(a)$ olemassaololle ja arvolle.

4. Olkoon $A \subset \mathbf{R}$.
(a) Todista käyttämättä siirtoperiaatetta: Joukko $A \subset \mathbf{R}$ on pisteen $a \in \mathbf{R}$ ympäristö, jos ja vain jos jokainen $x \in {}^*\mathbf{R}$, jolle $x \approx a$, kuuluu A:n epästandardiin laajennukseen ${}^*A$ (ts. $\mathrm{monad}(a) \subset {}^*A$).
(b) Todista (a)-kohdan väite siirtoperiaatteen avulla.
(c) Osoita, että joukko $A \subset \mathbf{R}$ on avoin, jos ja vain jos kaikilla $x \in A$ $\mathrm{monad}(x) \subset {}^*A$.
(d) Osoita, että joukolle $F \subset \mathbf{R}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
(i) F on suljettu;
(ii) $x \in F$ aina, kun $x \in \mathbf{R}$ on sellainen, että jollakin $y \in {}^*F$ pätee $x \approx y$. (eli on olemassa $y \in \mathrm{monad}(x) \cap {}^*F$).
(HUOM! Tässä pisteen ympäristöllä tarkoitetaan joukkoa, joka
sisältää kyseisen pisteen sisältävän avoimen joukon. Ympäristö ei siis välttämättä ole avoin.)

5. (a) Määrittele internaalinen ja eksternaalinen hyperreaalilukujoukko.
(b) Olkoon $A \subset {}^*\mathbf{R}$ internaalinen joukko. Todista: Jos A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, niin ${}^*\mathbf{R}$:ssä on A:n pienin yläraja.
(c) Anna esimerkki ${}^*\mathbf{R}$:n epätyhjästä ylhäältä rajoitetusta osajoukosta, jolla ei ${}^*\mathbf{R}$:ssä ole pienintä ylärajaa.
(d) Onko kahden internaalisen joukon leikkaus välttämättä internaalinen? Onko kahden eksternaalisen joukon leikkaus välttämättä eksternaalinen?