Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Homotopiateoria
Kurssikoe 19.12.2006

1. a) Anna esimerkki (kantapiste)avaruuksista (X, x_0), (Y, y_0) sekä funktiosta $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ siten, että $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ on surjektio, mutta ei injektio.

b) Anna esimerkki (kantapiste)avaruuksista (X, x_0), (Y, y_0) sekä funktiosta $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ siten, että $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ on injektio, mutta ei surjektio.

c) Anna esimerkki (kantapiste)avaruuksista (X, x_0), (Y, y_0) sekä funktiosta $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ siten, että $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ on isomorfismi, mutta X ja Y eivät ole homeomorfiset.

2. Jompikumpi seuraavista, a) tai b):

a) Osoita yksityiskohtaisesti, että suljettu puolitaso $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ ei ole homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ kanssa.

b) Mitä tiedetään homotopiaryhmistä $\pi_k(S^n)$, arvoilla $1 \leq k \leq n$ (ei tarvitse todistaa). Osoita näiden tietojen avulla yksityiskohtaisesti, että $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R}^m$ eivät ole homeomorfiset, kun $n \neq m$.

3. Oletetaan, että $p\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ on peitekuvaus, Z yhtenäinen ja lokaalisti polkuyhtenäinen avaruus, $z_0 \in Z$ ja $f\colon (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ jatkuva. Formuloi perusryhmien avulla ehto, joka on välttämätön ja riittävä ehto noston $\tilde{f}\colon (Z, z_0) \to (X, x_0)$ olemassaololle (ei tarvitse todistaa).

Osoita, että jokainen jatkuva kuvaus $f : \mathbb{R}P^2 \to S^1$ on nollahomotooppinen ($\mathbb{R}P^2$ on projektiivinen taso).

4. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia, $f\colon X \to Y$ homotopiaekvivalenssi, $x_0 \in X$ ja $y_0 = f(x_0)$. Osoita: jos y_0 on hyvä kantapiste (eli: inkluusio $\{y_0\} \to Y$ on kofibraatio), niin f:llä on homotopiakäänteiskuvaus g, jolle $g(y_0) = x_0$.

5. Esittele lyhyesti perusryhmän määritelmä: mitä ovat ryhmän alkiot, miten ne konstruoidaan? Miten laskutoimitus määritellään? Esittele myös indusoidun homomorfismin määritelmä ja tärkeimmät ominaisuudet. Tässä ei tarvitse esittää todistuksia, tarvittaessa voit käyttää esim. sanontaa "voidaan osoittaa, että ...".

Miten määritelmä voidaan yleistää (ryhmät π_n)?

Muistathan vastata kurssikyselyyn laitoksen nettisivuilla.