Henkivakuutusmatematiikka 9.8.2007

1. Olkoon vuosikorko i positiivinen ja $n \in \mathbf{N}$. Talletetaan pankkitilille määrä $B(k)$ hetkellä k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Olkoon $V(k)$ tilin saldo hetkellä k juuri ennen talletusta $B(k)$, kun korko määräytyy korkoa korolle -periaatteen mukaisesti.

Olkoon $\alpha > i$ ja $C > 0$. Määrää talletukset $\{B(k); k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ siten, että $V(k) = C(1+\alpha)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2. Olkoon elinajan T kerymäfunktio F kaikkialla derivoituva.

a) Määrittele T:hen liittyvä kuolevuus μ.

b) Olkoon $x > 0$ kiinteä ja μ_x elossaolevan x-ikäisen kuolevuus. Osoita, että

$$\mu_x(t) = \mu(x+t), \quad \forall t \geq 0.$$

3. Tarkastellaan elämänvaravakuutusta, jossa (mahdollinen) korvaus vakuutuskauden lopussa on S. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvana koko kauden ajan. Maksun perimisestä aiheutuu liikekuluja intensiteetillä $\kappa\overline{B}$, missä $\overline{B}$ on vakuutuksen jatkuva bruttomaksu. Olkoot kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ positiivisia vakioita ja vakuutuskauden pituus $n \geq 2$. Oletetaan, että hetkellä $n-1$ vakuutus muutetaan vapaakirjaksi. Määrää muutoksen jälkeinen korvaussumma S', kun vakuutuksen hinnoittelu ja muutoksen toteutus tapahtuvat ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti.

4. Tarkastellaan vakuutusta, jossa yhtiö korvaa kuolihetkellä T vakuutuksen vastuuvelan $V(T-)$ (vastuuvelka juuri ennen kuolinhetkeä) ja lisäksi summan S. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun vakuutettu on x-ikäinen, vakuutusaika on n ja kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ ovat positiivisia vakioita.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Olkoot intensiteetit $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{14}$, μ_{23}, μ_{24} positiivisia jatkuvia funktioita ja muut nollia. Vakuutetun ikä on huomioitu intensiteeteissä. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön, 3 = kuollut sairauteen ja 4 = kuollut tapaturmaisesti. Vakuutettu on aktiivi hetkellä nolla ja saa tilassa 2 jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia.

a) Esitä forward-yhtälöt, joiden ratkaisuna saadaan vakuutetun tilassaolotodennäköisyydet eri ajanhetkinä.

b) Osoita, että vakuutettu saa elossaoloaikanaan positiivisen määrän korvausta todennäköisyydellä

$$\int_0^\infty \mu_{12}(u) e^{-\int_0^u (\mu_{12}(s)+\mu_{13}(s)+\mu_{14}(s))ds} du.$$

Henkivakuutusmatematiikka 18.12.2007

1. Olkoon vuosikorko $i > 0$, lainan määrä L ja laina-aika $2n$ vuotta ($n \in \mathbf{N}$). Lainasta maksetaan n:n ensimmäisen vuoden aikana kunkin vuoden lopussa korot ja sen jälkeen laina kuoletetaan tasa-erinä (annuiteettina) vuosittain takakäteisesti. Määrää vuosittaiset maksuerien suuruudet.

2. Tarkastellaan x-ikäiselle otettua elämänvaravakuutusta, jossa korvataan hetkellä n summa S, jos vakuutettu on tällöin elossa. Vakuutusmaksu maksetaan jatkuvana ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\overline{B}$ välillä $(0, n)$. Tämä sisältää erän $\kappa\overline{B}$ maksun perimisestä aiheutuvia liikekuluja varten, missä $\kappa \in (0, 1)$ on vakio. Olkoon korkoutuvuus δ positiivinen vakio ja kuolevuus μ jatkuva funktio. Vakuutus päätetään takaisinostoon hetkellä $t \in (0, n)$.

a) Osoita, että takaisinostoarvo ei riipu kuormituksesta κ.

b) Oletetaan lisäksi, että kuolevuus on positiivinen vakio. Määrää vakuutuksen takaisinostoarvo.

3. Oletetaan, että vallitsevia kuolinsyitä on kaksi ja että näihin liittyvät jäljellä olevat elinajat ovat riippumattomia. Jos i olisi ainut kuolinsyy, olisi vastasyntyneen jäljellä olevan elinajan T_i kertymäfunktio F_i,

$$F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}, \; i = 1, 2,$$

missä μ_1 ja μ_2 ovat positiivisia vakioita ($t \geq 0$). Määrää x-ikäisenä n:ksi vuodeksi ostettavan heti alkavan jakuvan eläkkeen nettokertamaksu, kun maksettavan eläkkeen intensiteetti on vakio S ja korkoutuvuus on $\delta > 0$.

4. Kuolemanvaravakuutuksessa maksetaan korvaus S_k vuoden k lopussa, jos vakuutettu kuolee vuoden k aikana, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Vakuutettu maksaa vuoden k alussa vakuutusmaksun P_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, mikäli on tällöin elossa. Vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä. Olkoon korkoutuvuus δ ja kuolevuus μ. Olkoon edelleen $V(k)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä k juuri ennen erän P_k maksamista. Todista, että

$$e^{\delta}(V(k) + P_k) = q_{x+k}S_k + p_{x+k}V(k+1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

5. Tarkastellaan sairausvakuutusta, jossa yhtiö maksaa seuraavan vuoden aikana vakuutetulle jatkuvaa korvausta intensiteetillä S vakuutetun ollessa sairas. Mallinnetaan vakuutetun tila Markov-prosessiksi, jossa mahdollisia tiloja ovat 'terve' ja 'sairas' (kuolevuus tarkasteltavalla ikävälillä oletetaan nollaksi). Oletetaan, että terve sairastuu intensiteetillä σ ja että sairas paranee intensiteetillä τ, missä σ ja τ ovat positiivisia vakioita. Korkoutuvuus oletetaan nollaksi. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun vakuutettu on vuoden alussa terve. Millä todennäköisyydellä vakuutettu saa korvausta kyseisen vuoden aikana.

Tehtävässä voi tarvittaessa käyttää tietoa: $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ silloin ja vain silloin kun

$$y(t) = e^{-A(t)}[\int e^{A(t)}b(t)dt + C],$$

missä A on jokin a:n integraalifunktio ja C mielivaltainen vakio (a ja b ovat jatkuvia funktioita).

Henkivakuutusmatematiikka 24.1.2008

1. Tarkastellaan seuraavia investointivaihtoehtoja I ja II:

I $B(0) = -4, B(1) = 0, B(2) = 5.76$,

II $B(0) = -4, B(1) = 5$,

missä $B(j)$ on hetkellä j toteutettava suoritus (positiivinen $B(j)$ tarkoittaa rahan saamista). Kumpi investoinneista on kannattavampi, kun kriteerinä käytetään a) sisäistä korkoa, b) nettonykyarvoa korkokannalla $i = 0.05$.

2. Olkoon kuolevuus $\mu(x) = x^2$ alueessa $x \geq 0$. Määrää todennäköisyys, että vastasyntynyt kuolee ikävälillä (t, u), missä $0 < t < u$.

3. Tarkastellaan elämänvaravakuutusta, jossa vakuutettu saa hetkellä n summan S, jos on tällöin elossa. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$, kuolevuus μ ja vakuutettu x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä nolla. Vakuutusmaksujen perimisestä oletetaan syntyvän liikekuluja vakiointensiteetillä $\lambda > 0$. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti koko kauden $[0, n]$ ajan ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\overline{B}$.

a) Esitä vakuutuksen bruttovastuuvelkaa kuvaava Thielen yhtälö välillä $(0, n)$ reunaehtoineen.

b) Osoita tämän avulla, että $\overline{B} = \lambda + S\ D_{x+n} / \int_0^n D_{x+u} du$, missä $\forall y \geq 0$, $D_y = e^{-\int_0^y (\delta + \mu_s) ds}$.

4. Kahden hengen elämänvaravakuutus on voimassa n vuotta. Henkilöiden iät ovat x_1 ja x_2. Korvauksena maksetaan summa S_i, jos vain x_i-ikäinen on elossa vakuutuksen päättyessä, $i = 1, 2$. Jos molemmat ovat elossa, maksetaan summa S. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu suureiden $A_{x_{j_1} \cdots x_{j_k} : \overline{n}|}(\mathrm{V})$ avulla. Vakuutettujen elinajat oletetaan toisistaan riippumatomiksi.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, \ldots, N\}$ ja siirtymäintensiteetit $\mu_{ij}, i, j \in E$, ei-negatiivisia jatkuvia funktioita. Vakuutetun ikä on huomioitu intensiteeteissä. Vakuutettu on hetkellä nolla tilassa 1 ja saa tilassa i jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S_i aikavälillä $(0, n)$ (S_i voi olla myös nolla tai negatiivinen, jolloin vastaavasti korvausta ei makseta tai vakuutettu maksaa jatkuvaa vakuutusmaksua). Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$ on vakio. Johda Thielen yhtälöt vastuuvelan määräämiseksi tiloissa $i \in E$. Mitkä ovat reunaehdot hetkellä n.

Henkivakuutusmatematiikka 3.4.2008

1. Oletetaan, että vallitsevia kuolinsyitä on kaksi ja että näihin liittyvät jäljellä olevat elinajat ovat riippumattomia. Jos i olisi ainut kuolinsyy, olisi vastasyntyneen jäljellä olevan elinajan T_i kertymäfunktio F_i, $F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$, $i = 1, 2$, missä μ_1 ja μ_2 ovat positiivisia vakioita ($t \geq 0$). Määrää x-ikäisenä n:ksi vuodeksi ostettavan heti alkavan jakuvan eläkkeen nettokertamaksu, kun maksettavan eläkkeen intensiteetti on vakio S ja korkoutuvuus on $\delta > 0$.

2. Olkoon vastasyntyneen todennäköisyys olla elossa x-vuotiaana $\frac{1}{2}e^{-ax} + \frac{1}{2}e^{-bx}$ kaikilla $x > 0$, missä a ja b ovat positiivisia vakioita. Määrää x-ikäisen kuolevuus $\mu(x)$.

3. Tarkastellaan kuolemanvaravakuutusta, jossa korvauksena maksetaan kuolinhetkellä T summa S, jos $T \in [0, n]$. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti maksuaikana $[0, h]$ ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\overline{P}$. Oletetaan, että S ja $\overline{P}$ ovat vakioita ja että $h \in [0, n]$. Olkoot kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ positiivisia vakioita.

a) Määrää elossa olevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä $t \in (0, h)$ parametrien S, μ, δ, h ja n avulla. Mikä on kyseinen vastuuvelka, jos $h = n$.

b) Osoita, että elossa olevan vakuutetun vastuuvelka on ei-negatiivinen.

4. Tarkastellaan x-ikäiselle otettua kertamaksuista elämänvaravakuutusta, jossa korvataan hetkellä n summa S, jos vakuutettu on tällöin elossa. Olkoot i ja μ ensimmäisen ja $i_1^*, \ldots, i_n^*$ ja μ^* toisen kertaluvun korko- ja kuolevuusperusteet ($i, i_1^*, \ldots, i_n^*$ ovat vuosikorkoja). Olkoon η_k vuoden k satunnaisylijäämä kyseisen vuoden alussa elossa olevalle vakuutetulle ja y_k tämän odotusarvotason vastine toisen kertaluvun perusteilla laskettuna, $k = 1, \ldots, n$. Merkitään

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} (1 + i_{k+1}^*) \cdots (1 + i_n^*)\, {}_{k-1}p_x^* y_k,$$

missä ${}_{k-1}p_x^*$ tarkoittaa toisen kertaluvun perusteiden mukaista elossaolotodennäköisyyttä. Olkoon P ensimmäisen ja P^* toisen kertaluvun perusteilla määrätty ekvivalenssiperiaatteen mukainen nettokertamaksu. Osoita, että $Y_n = (1 + i^*)^n (P - P^*)$, kun $i_1^* = \cdots = i_n^* = i^*$.

5. Vakuutettu voi olla tiloissa $\{1, \ldots, N\}$, missä $N \geq 3$. Yhtiö maksaa aikavälillä $[0, n]$ jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S_j, jos vakuutettu on tilassa $j \in \{2, \ldots, N - 1\}$. Tiloissa $j = 1$ ja $j = N$ ei makseta mitään. Tarkastellaan vakuutetun tilaa Markov-prosessina. Siirtymäintensiteetit μ_{jk}, $j, k \in \{1, \ldots, N\}$ oletetaan jatkuviksi. Oletetaan lisäksi, että intensiteetit $\mu_{j,j-1}$ ja μ_{kN} ovat positiivisia funktioita kaikilla $j = 1, \ldots, N - 2$ ja $k = 1, \ldots, N - 1$. Muut intensiteetit oletetaan nolliksi. Vakuutusmaksu maksetaan kertasuorituksena sopimuksen tekohetkellä nolla. Oletetaan, että vakuutettu on tilassa yksi hetkellä nolla ja että korkoutuvuus on $\delta > 0$.

a) Esitä Thielen yhtälöt vakuutetun tiloja $1, \ldots, N - 1$ koskevan vastuuvelan määräämiseksi välillä $[0, n]$. Esitä myös reunaehdot yhtälöille.

b) Esitä sellainen rekursiivinen menetelmä yhtälöryhmän ratkaisemiseksi, jossa kussakin vaiheessa ratkaistaan ensimmäisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö.

Life insurance mathematics 3.4.2008

1. In a life insurance contract concerning two persons, the company pays a sum S if the person 1 dies before the person 2. Calculate the probability that the sum is to be paid when the mortality of person 1 is μ and of person 2 $c\mu$ (c is a positive constant and μ a continuous and positive function).

2. The probability that a person of age zero is alive at age x is $\frac{1}{2}e^{-ax} + \frac{1}{2}e^{-bx}$ for all $x > 0$, where a and b are positive constants. Determine the mortality at every age $x \geq 0$.

3. Let i be a given annual effective interest rate and $i^{(m)}$ the corresponding nominal interest rate, convertible m times per year ($m \in \mathbf{N}$). Show that $i^{(m)}$ is decreasing in m.

4. Consider a contract where the company pays S euros to the insured at the end of the year $2n$ if th insured is alive at that time. The insured pays the annual premium P at the beginning of each year k if he is alive, $k = 1, \dots, 2n$. The premium is determined by the principle of equivalence. The mortality μ and the force of interest δ are supposed to be positive constants.

a) Determine P in terms of S, μ and δ.

b) At the end of the year n, just before the premium payment, the insured asks the company to change the benefit S such that no premiums will be paid in the future. Determine the new benefit.

5. Consider a whole life insurance where the payment S_k takes place at the end of the year k in case the insured dies durig the year k, $k = 0, 1, \dots, n-1$. The insured pays the amount P_k at the beginning of the year k, $k = 0, 1, \dots, n-1$, if he is then alive. The insured is of age x at the beginning of the contract. Let δ be the (constant) force of interest. Let further $V(k)$ be the net premium reserve of a living insured just before he pays the kth premium P_k. Show that

$$e^{\delta}(V(k) + P_k) = q_{x+k}S_k + p_{x+k}V(k+1), \quad k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Show that the formula also holds for $k = n-1$ with convention $V(n) = 0$.

Henkivakuutusmatematiikka 12.6.2008

1. Olkoon vuosikorko $i > 0$, lainan määrä L ja laina-aika n vuotta ($n \in \mathbf{N}$). Lainasta maksetaan kunkin vuoden lopussa lyhennyksenä määrä L/n ja lisäksi kyseisen vuoden aikana syntyneet korot. Olkoon $B(k)$ vuoden k lopussa suoritettavan erän suuruus , $k = 1, \dots, n$.

a) Määrää $B(k)$.

b) Määrää kassavirran $B(1), \dots, B(n)$ vuoden yksi alkuun diskontattu arvo.

2. Oletetaan, että vallitsevia kuolinsyitä on kaksi ja että näihin liittyvät jäljellä olevat elinajat ovat T_1 ja T_2. Oletetaan, että $T_1 = \min(\xi_1, \xi_2)$ ja $T_2 = \min(\xi_2, \xi_3)$, missä ξ_1, ξ_2 ja ξ_3 ovat riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla λ (tiheysfunktio on $\lambda e^{-\lambda x}$ alueessa $x > 0$). Okoon edelleen $T = \min(T_1, T_2)$. Määrää elinaikoihin T_1, T_2 ja T liittyvät kuolevuudet μ_1, μ_2 ja μ. Miksi $\mu \neq \mu_1 + \mu_2$.

3. Tarkastellaan kuolemanvaravakuutusta, jossa korvauksena maksetaan summa $S(t)$, jos vakuutettu kuolee hetkellä $t \in [0, n]$. Oletetaan, että S on jatkuva funktio. Kuolevuus olkoon μ ja korkoutuvuus vakio δ. Vakuutusmaksu maksetaan kertamaksuna vakuutuskauden alussa. Määrää elossa olevan vakuutetun vastuuvelkaa kuvaava Thielen yhtälö. Miten tätä voidaan hyödyntää vakuutusmaksun määräämisessä.

4. Tarkastellaan vakuutusta, jossa yhtiö maksaa elossa olevalle vakuutetulle jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S aikavälillä $(n, 2n)$, $n \in \mathbf{N}$. Vakuutusmaksu maksetaan jatkuvana ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\overline{B}$ välillä $(0, n)$. Tämä sisältää erän $\kappa\overline{B}$ maksun perimisestä aiheutuvia liikekuluja varten, missä $\kappa \in (0, 1)$ on vakio. Oletetaan, että kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ ovat positiivisia vakioita.

a) Osoita, että $\overline{B} = Se^{-n(\delta+\mu)}/(1-\kappa)$.

b) Hetkellä $t = 1$ vakuutus muutetaan vapaakirjaksi (korvausintensiteettiä muutetaan siten, että vakuutusmaksuja ei tarvitse maksaa). Määrää muutoksen jälkeinen korvausintensiteetti.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Olkoot intensiteetit μ_{12}, μ_{13} ja μ_{23} positiivisia vakioita ja muut nollia. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön ja 3 = kuollut. Vakuutettu on aktiivi hetkellä nolla ja saa tilassa 2 jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia.

a) Määrää tilassaolotodennäköisyydet $P_{1j}(0, t)$, $t > 0, j \in E$.

b) Määrää todennäköisyys sille, että vakuutettu saa korvausta elossaoloaikanaan.

Life insurance mathematics 12.6.2008

1. Let i be a given annual effective interest rate and $n \in \mathbf{N}$. At time k, a saving $B(k)$ to a bank account takes place, $k = 0, 1, \ldots, n$. Denote by $V(k)$ the amount at the account at time k just before the saving $B(k)$ takes place (the interest is compounded in yearly basis).

Let $\alpha > i$ and $C > 0$. Determine $\{B(k); k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ such that $V(k) = C(1+\alpha)^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2. Define the mortality of (x) at the age $x + t$. Given a continuous mortality μ_x, derive an expression for ${}_tp_x$.

3. Consider two causes of the death with corresponding independent life times T_1 and T_2. Given that i would be the only cause in force, the future life time would have the distribution F_i,

$$F_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t},\ i = 1, 2,$$

where μ_1 and μ_2 are positive constants and $t \geq 0$ (the real life time is $\min(T_1, T_2)$). Consider a contract where the company pays S euros to the insured at the beginning of each year k if the insured is alive, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbf{N}$. The insured pays the whole premium at the beginning of the contract. Determine that premium.

4. Consider a contract where the company pays S euros to the insured at the end of the year $2n$ if th insurd is alive at that time. The insured pays the annual premium P at the beginning of each year k if he is alive, $k = 1, \ldots, 2n$. The premium is determined by the principle of equivalence. The mortality μ and the force of interest δ are supposed to be positive constants.

a) Determine P in terms of S, μ and δ.

b) At the end of the year n, just before the premium payment, the insured asks the company to change the benefit S such that no premiums will be paid in the future. Determine the new benefit.

5. Consider a whole life insurance where the payment S_k takes place at the end of the year k in case the insured dies durig the year k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. The insured pays the amount P_k at the beginning of the year k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, if he is then alive. The insured is of age x at the beginning of the contract. Let δ be the (constant) force of interest. Let further $V(k)$ be the net premium reserve of a living insured just before he pays the kth premium P_k. Show that

$$e^{\delta}(V(k) + P_k) = q_{x+k}S_k + p_{x+k}V(k+1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Show that the formula also holds for $k = n-1$ with convention $V(n) = 0$.

Henkivakuutusmatematiikka 14.8.2008

1. Olkoon vuosikorko $i > 0$, lainan määrä L ja laina-aika n vuotta. Laina nostetaan vuoden yksi alussa ja maksetaan takaisin korkoineen ekvivalenssiperiaatteen mukaisella maksuohjelmalla $B(1), B(2), \ldots, B(n)$, missä suoritus $B(j)$ toteutetaan vuoden j lopussa, $j = 1, 2, \ldots, n$. Oletetaan, että maksuohjelmaan tehdään vuoden m lopussa suorituksen $B(m)$ jälkeen ekvivalenssiperiaatteen mukainen muutos, $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq m \leq n-1$ (korkoa ei muuteta). Oletetaan, että tulevat suoritukset muutoksen jälkeen tapahtuvat vuosien $m+1, \ldots, n$ lopussa ja vuoden j suoritus on $B'(j)$, $j = m+1, \ldots, n$. Osoita, että kassavirran $B(1), \ldots, B(m), B'(m+1), \ldots, B'(n)$ vuoden yksi alkuun diskontattu arvo on L.

2. Oletetaan, että vallitsevia kuolinsyitä on kaksi ja että näihin liittyvät jäljellä olevat elinajat ovat T_1 ja T_2. Oletetaan, että $T_1 = \min(\xi_1, \xi_2)$ ja $T_2 = \min(\xi_2, \xi_3)$, missä ξ_1, ξ_2 ja ξ_3 ovat riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon

$$\nu_j(x) = \lim_{\Delta \to 0+} \Delta^{-1} \mathbf{P}(\xi_j \in (x, x+\Delta] | \xi_j > x), \ x \geq 0,$$

muuttujaan ξ_j liittyvä kuolevuus, $j = 1, 2, 3$. Okoon edelleen $T = \min(T_1, T_2)$. Määrää elinaikoihin T_1, T_2 ja T liittyvät kuolevuudet μ_1, μ_2 ja μ. Miksi $\mu \neq \mu_1 + \mu_2$.

3. Tarkastellaan vakuutusta, jossa yhtiö korvaa vakuutetulle määrän $S = 100$ kuolinhetkellä, jos vakuutettu kuolee ennen hetkeä $2n = 20$. Vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä nolla ja maksaa vakuutuksen kertamaksuna. Hetkellä n vakuutettu muuttaa vakuutusta siten, että yhtiö maksaa määrän $S/2$ kuolinhetkellä, jos vakuutettu kuolee ennen hetkeä $2n$ ja summan $S/2$ hetkellä $2n$, jos vakuutettu on tällöin elossa. Vakuutusmaksu maksetaan hetkestä n lähtien jatkuvana vakiosuuruisena koko vakuutuskauden ajan. Olkoot korkoutuvuus $\delta = 0.04$ ja kuolevuus $\mu = 0.01$ vakioita. Määrää muutoksen jälkeinen maksuintensiteetti.

4. Kuolemanvaravakuutuksessa maksetaan korvaus S_k vuoden k lopussa, jos vakuutettu kuolee vuoden k aikana, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Vakuutettu maksaa vuoden k alussa vakuutusmaksun P_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, mikäli on tällöin elossa. Vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä. Olkoon korkoutuvuus δ ja kuolevuus μ. Olkoon edelleen $V(k)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä k juuri ennen erän P_k maksamista. Todista, että

$$e^{\delta}(V(k) + P_k) = q_{x+k} S_k + p_{x+k} V(k+1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

5. Tarkastellaan sairausvakuutusta, jossa yhtiö maksaa aikavälillä $(0, 1)$ vakuutetulle jatkuvaa korvausta intensiteetillä S vakuutetun ollessa sairas. Mallinnetaan vakuutetun tila Markov-prosessiksi, jossa mahdollisia tiloja ovat 'terve' ja 'sairas' (kuolevuus tarkasteltavalla ikävälillä oletetaan nollaksi). Oletetaan, että terve sairastuu intensiteetillä σ ja että sairas paranee intensiteetillä τ, missä σ ja τ ovat positiivisia vakioita. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$. Oletetaan, että vakuutettu on terve hetkellä $t = 0$ ja että vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti intensiteetillä $\overline{P}$ vakuutetun ollessa terve. Määrää ekvivalenssiperiaatteen mukainen $\overline{P}$.

Henkivakuutusmatematiikka 16.12.2008

1. Olkoon lainan määrä $L = 3000$ ja laina-aika 3 vuotta. Laina nostetaan hetkellä 0 ja maksetaan takaisin siten, että hetkillä 1 ja 2 lainansaaja maksaa kumpanakin 1000 euron suorituksen ja hetkellä kolme loput. Määrää viimeisen erän suuruus, kun korkoutuvuus hetkellä $t \geq 0$ on $\delta(t) = \delta_0 + at$, missä $\delta_0 = 0.1$ ja $a = 0.05$.

2. Olkoot T_1 ja T_2 kaksi riippumatonta elinaikaa ja μ_1 ja μ_2 vastaavat kuolevuudet. Oletetaan, että μ_1 ja μ_2 ovat jatkuvia. Määrää elinaikaan $T = \max(T_1, T_2)$ liittyvä kuolevuus.

3. Erään kuolemanvaravakuutuksen vakuutuskausi on kolme vuotta. Kuolinhetkellä maksettava korvaussumma on $3S$ ensimmäisen, $2S$ toisen ja S kolmannen vuoden aikana. Korkoutuvuus on vakio δ ja kuolevuus vakio μ.

a) Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

b) Oletetaan, että vakuutusmaksua maksetaan etukäteen puolivuosittain 6 tasaeränä. Määrää erän suuruus.

4. Kertamaksuisessa hetkellä nolla alkavassa vakuutuksessa maksetaan jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Lisäksi hetkellä n maksetaan kertasuoritus S vakuutetun eläessä. Elossa olevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$ on $\alpha(n - t) + S$, missä α on vakio. Määrää intensiteetti $\bar{S}(t), \forall t \in (0, n)$. Mikä on vakuutuksen nettokertamaksu.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Olkoot intensiteetit $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}$ ja μ_{23} positiivisia jatkuvia funktioita ja muut nollia. Vakuutetun ikä on huomioitu intensiteeteissä. Tilojen tulkinnat ovat $1 =$ aktiivi, $2 =$ työkyvytön ja $3 =$ kuollut. Vakuutettu on aktiivi hetkellä nolla ja saa tilassa 2 jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}$. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia. Vakuutuskausi on n vuotta ja korkoutuvuus vakio δ.

a) Esitä differentiaaliyhtälöryhmä, jonka ratkaisuna saadaan aktiivin ja työkyvyttömän vastuuvelat.

b) Lisätään malliin tila 4, joka tarkoittaa vakuutuksen päättymistä takaisinostoon. Tämä on sopimuksen mukaan mahdollista vain tilassa 1. Takaisinostohetkellä vakuutetulle maksetaan kyseisenä hetkenä laskettu vastuuvelka. Olkoon takaisinostointensiteetti τ jatkuva. Osoita, että vakuutuksen nettokertamaksu on sama kuin a-kohdan mallissa.

Henkivakuutusmatematiikka 22.1.2009

1. Erään investoinnin sisäinen korko on 5%. Käytettävissä on vaihtoehtoinen investointi, joka tuottaa kassavirran

$$B(0) = -1\,000, \quad B(1) = -1\,000, \quad B(2) = 1\,100, \quad B(3) = 1\,200,$$

missä $B(k)$ tarkoittaa hetkellä k tapahtuvaa suoritusta (nykyhetki on 0). Kumpi investoinneista on kannattavampi sisäisellä korolla mitattuna.

2. Kilpailevien kuolinsyiden mukaisessa asetelmassa syyhyn i liittyvä kuolevuus on $c_i e^{bx}$ alueessa $x > 0$, missä c_i ja b ovat positiivisia vakioita, $i = 1, 2$. Olkoon T todellinen henkilön elinaika.

a) Määrää elinaikaan T liittyvät elossaolotodennäköisyydet ${}_tp_x$ $(x > 0, t > 0)$.

b) Määrää todennäköisyys sille, että henkilö kuolee syyhyn 1.

3. Erään kuolemanvaravakuutuksen vakuutuskausi on kaksi vuotta ja korvaussumma vakio S. Kuolevuus on vakio $\mu > 0$ ja korkoutuvuus

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1, & \text{kun t } \in [0, 1) \\ \delta_2, & \text{kun t } \in [1, 2), \end{cases}$$

missä δ_1 ja δ_2 ovat positiivisia vakioita. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

4. Kertamaksuisessa hetkellä nolla alkavassa vakuutuksessa maksetaan jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Lisäksi hetkellä n maksetaan kertasuoritus S vakuutetun eläessä. Elossa olevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$ on eräs t:stä riippumaton vakio. Määrää intensiteetti $\bar{S}(t), \forall t \in (0, n)$. Mikä on vakuutuksen nettokertamaksu.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Olkoot intensiteetit μ_{12}, μ_{13}, μ_{21} ja μ_{23} positiivisia vakioita ja muut nollia. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön ja 3 = kuollut. Vakuutettu on aktiivi hetkellä nolla ja saa tilassa 2 jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}$. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia. Vakuutuskausi on n vuotta ja korkoutuvuus vakio δ. Vakuutus on kertamaksuinen.

Olkoon $V_1(t)$ hetkellä t tilassa 1 olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka. Osoita, että V_1 toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$V_1''(t) + aV_1'(t) + bV_1(t) = c,$$

missä a, b ja c ovat vakioita. Määrää myös $V_1(n-)$ ja $V_1'(n-)$.

Henkivakuutusmatematiikka 2.4.2009

1. Olkoon lainan määrä L ja laina-aika 3 vuotta. Laina nostetaan hetkellä 0 ja maksetaan takaisin ekvivalenssiperiaatteen mukaisilla suorituksilla $B(k)$ siten, että suoritus $B(k)$ tapahtuu hetkellä k, $k = 1, 2, 3$. Lainaan sovelletaan kiinteää vuosikorkoa $i \geq 0$. Olkoon $B(2) = iL/2$ ja $B(3) = (1+i)L/2$. Määrää lyhennyksen osuus suorituksissa $B(1)$, $B(2)$ ja $B(3)$.

2. Kilpailevien kuolinsyiden mukaisessa asetelmassa syyhyn j liittyvä kuolevuus on μ_j, $j = 1, 2$. Oletetaan, että syittäiset hypoteettiset elinajat ovat toisistaan riippumattomia ja että $\mu_2 = c\mu_1$, missä c on positiivinen vakio. Määrää todennäköisyys sille, että vastasyntynyt kuolee syyhyn 1.

3. Erään eläkevakuutuksen vakuutuskausi on kolme vuotta. Hetkellä k maksetaan summa S_k, mikäli vakuutettu on tällöin elossa, $k = 1, 2, 3$. Olkoon korkoutuvuus $\delta(t) = \delta_0 + at$ alueessa $t \geq 0$ ja y-ikäisen kuolevuus ce^{by} alueessa $y > 0$, missä δ_0, a, b ja c ovat positiivisia vakioita. Sopimus tehdään hetkellä 0, jolloin vakuutettu on x-ikäinen.

a) Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

b) Oletetaan, että vakuutusmaksu maksetaan kahtena tasaeränä hetkillä 0 ja 1/2. Määrää erän suuruus.

4. Yhdistelmävakuutuksessa maksetaan hetkellä n summa Q, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Jos vakuutettu kuolee hetkellä $t \in [0, n]$, maksetaan kuolintapauskorvauksena summa $S(t)$, missä S on eräs jatkuva funktio välillä $[0, n]$. Vakuutusmaksu maksetaan jatkuvana koko vakuutuskauden ajan vakiointensiteetillä $\bar{P}$. Okoon kuolevuus μ jatkuva funktio ja korkoutuvuus δ positiivinen vakio. Sopimus tehdään hetkellä 0, jolloin vakuutettu on x-ikäinen.

Olkoon Q annettu ja $V(t)$ elossaolevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$. Määrää funktio S ja intensiteetti $\bar{P}$ siten, että riskisumma $S(t) - V(t)$ on nolla kaikilla $t \in (0, n)$.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Olkoot intensiteetit μ_{12}, μ_{13} ja μ_{23} positiivisia jatkuvia funktioita. Muut intensiteetit ovat nollia. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön ja 3 = kuollut. Vakuutettu on aktiivi sopimuksen tekohetkellä nolla ja vakuutuskausi on n vuotta. Kuolintapaushetkellä maksetaan summa S ja työkyvyttömäksi tulohetkellä summa Q (korvaus maksetaan, jos tätä vastaava tapahtuma on sattunut vakuutuskaudella). Korkoutuvuus on vakio $\delta > 0$ ja vakuutus on kertamaksuinen. Olkoon $V_j(t)$ hetkellä t tilassa j olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka.

a) Johda Thielen yhtälöt vastuuvelkojen V_1 ja V_2 määräämiseksi.

b) Esitä vastuuvelkoihin V_1 ja V_2 nojautuva menettely vakuutuksen nettokertamaksun määräämiseksi.

Henkivakuutusmatematiikka 11.6.2009

1. Olkoon korkoutuvuus positiivinen vakio δ, lainan määrä L ja laina-aika n. Laina nostetaan hetkellä nolla ja maksetaan korkoineen takaisin ekvivalenssiperiaatteen mukaisella jatkuvalla kassavirralla b. Määrää kassavirta b, kun differentiaalinen lainan lyhennys välillä $[t, t+dt)$ on $at\,dt$, kaikilla $t \in [0, n]$ ja a on sopiva vakio.

2. Eräässä populaatiossa kaikkien vastasyntyneiden kuolevuus μ on sama ja Gombertz-mallin mukainen,

$$\mu(t) = be^{ct}, \quad \forall t \geq 0,$$

missä b ja c ovat positiivisia vakioita. Populaation henkilöt $1, \ldots, N$ tekevät sopimuksen, jonka mukaan yhtiö maksaa yhteensä korvauksen S vakuutetuille n:n vuoden kuluttua, jos kaikki mainitut henkilöt ovat tällöin elossa. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun korkoutuvuus on vakio δ ja henkilön j ikä sopimuksen tekohetkellä on x_j, $j = 1, \ldots, N$.

3. Erään kuolemanvaravakuutuksen vakuutuskausi on kolme vuotta. Kuolinhetkellä maksettava korvaussumma on $3S$ ensimmäisen, $2S$ toisen ja S kolmannen vuoden aikana. Korkoutuvuus on vakio δ ja kuolevuus vakio μ.

a) Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

b) Oletetaan, että vakuutusmaksua maksetaan etukäteen puolivuosittain 6 tasaeränä. Määrää erän suuruus.

4. Tarkastellaan kuolemanvaravakuutusta, jossa korvauksena maksetaan kuolinhetkellä T summa S, jos $T \in [0, n]$. Vakuutusmaksua maksetaan vakuutetun eläessä jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}(t)$ hetkellä $t, \forall t \in [0, n]$. Olkoon korkoutuvuus δ vakio, kuolevuus μ jatkuva ja vakuutettu x-ikäinen. Olkoon $V(t)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä $t \in [0, n]$. Määrää sellainen ekvivalenssiperiaatteen mukainen maksuintensiteetti $\bar{P}(t), t \in [0, n]$, että $V(t) = C$ (=vakio), $\forall t \in [0, n]$. Määrää myös C.

5. Olkoon Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{1, 2, 3\}$. Olkoot intensiteetit $\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{21}$ ja μ_{23} positiivisia jatkuvia funktioita ja muut nollia. Vakuutetun ikä on huomioitu intensiteeteissä. Tilojen tulkinnat ovat 1 = aktiivi, 2 = työkyvytön ja 3 = kuollut. Vakuutettu on aktiivi hetkellä nolla ja saa tilassa 2 jatkuvaa eläkettä intensiteetillä S. Muissa tiloissa ei makseta korvauksia.

a) Esitä forward-yhtälöt, joiden ratkaisuna saadaan vakuutetun tilassaolotodennäköisyydet eri ajanhetkinä.

b) Osoita, että vakuutettu saa korvausta elossaoloaikanaan todennäköisyydellä

$$\int_0^\infty \mu_{12}(u) e^{-\int_0^u (\mu_{12}(s) - \mu_{13}(s))ds} du.$$