Henkivakuutusmatematiikan jatkokurssi 21.3.2005

1. Olkoon T elinaika ja

$$Z(t) = \mathbf{1}(T \le t),\ t \ge 0.$$

Olkoon kuolevuus μ jatkuva. Osoita, että Z:n kompensaattori historian $\sigma(Z(s); s \le t)$ suhteen on

$$\int_0^t \mu(s)\mathbf{1}(T \ge s)ds,\ t \ge 0.$$

2. Tarkastellaan elämänvaravakuutusta, jossa vakuutetulle korvataan summa S, jos tämä on elossa hetkellä $n > 0$. Elossa oleva vakuutettu maksaa vakuutusmaksua jatkuvasti ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\overline{P}(t)$ välillä $t \in [0, n]$. Vakuutettu on x-ikäinen hetkellä nolla. Jäljellä oleva elinaika olkoon T. Olkoon korkoutuvuus δ ja x-ikäisen kuolevuus μ. Oletetaan, että $\overline{P}, \mu$ ja δ ovat ei-negatiivisia jatkuvia funktioita. Olkoon $D(t) = \int_0^t \delta(s)ds$ kaikilla $t \ge 0$.

Olkoon $Z(t) = \mathbf{1}(T \le t)$. Sopimuksen satunnaisylijäämä hetkeen $t \in [0, n]$ mennessä olkoon $\Gamma(t)$. Toisin sanoen

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{-D(s)}\overline{P}(s)\mathbf{1}(Z(s) = 0)\, ds - e^{-D(t)}V_{Z(t)}(t),$$

missä $V_j(t)$ on hetken t vastuuvelka, jos $Z(t) = j$. Osoita, että $\{\Gamma(t); t \in [0, n]\}$ on martingaali historian $\sigma(Z(s); s \le t)$ suhteen.

3. Elämänvaravakuutuksen vakuutusaika on n ja korvaussumma S. Olkoot δ, D, T ja Z kuten tehtävässä 2. Elossa oleva vakuutettu maksaa vakuutusmaksua jatkuvasti intensiteetillä $\overline{P}(t) = 1 - t/n$ välillä $t \in [0, n]$. Esitä elämänvarakorvauksen nykyarvo muodossa

$$\int_0^n e^{-D(s)}\mathbf{1}(Z(s) = 0)dA^{(1)}(s)$$

ts. määrää funktio $A^{(1)}$. Esitä vakuutusmaksujen nykyarvo samassa muodossa ts. määrää sellainen funktio $A^{(2)}$, että kyseinen nykyarvo on

$$\int_0^n e^{-D(s)}\mathbf{1}(Z(s) = 0)dA^{(2)}(s).$$

Määrää myös sellainen funktio A, että ekvivalenssiperiaatteen mukainen korvaussumma S määräytyy ehdosta

$$\mathbf{E}\left(\int_0^n e^{-D(s)}\mathbf{1}(Z(s) = 0)dA(s)\right) = 0.$$