Matematiikan laitos
Harmoninen analyysi
Loppukoe 18.6.2004 **Vastaa valintasi mukaan neljään tehtävään.**

1. Määrittele kullakin $1 \leq p < \infty$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ painofunktiot $w \in A_p$. Osoita, että $w \in A_p$ jos ja vain jos $\left(\frac{1}{w}\right)^{q-1} \in A_q$. Tässä $q = \frac{p}{p-1}$ ja $1 < p < \infty$.

2. Mitä sanoo $\mathbb{R}^n$:n Fourier muunnosta koskeva Riemann-Lebesguen lemma? Formuloi ja todista tämä tulos.

3. Olkoon w_α painofunktio $w_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $0 \leq \alpha < n$, niin $w_\alpha \in A_1$. Osoita tämän avulla, että $w_\alpha \in A_p$ kun $n(1-p) < \alpha < n$ ja $1 < p < \infty$.

4. Määrittele säännölliset Calderon-Zygmund ytimet $K(x)$ kaikissa dimensioissa n. Selitä kuinka Calderon-Zygmund operaattoreiden avulla voidaan kaikilla $1 < p < \infty$ todistaa, että jos $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on kompaktikantajainen C^∞-kuvaus niin

$$\| \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \| \Delta u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1 \leq j, k \leq n,$$

missä vakio $C(n,p)$ riippuu vain p:stä ja dimensiosta n. Kerro vastauksessasi tarvittavat Calderon-Zygmund teorian tulokset.

5. Olkoon f mitallinen funktio $\mathbb{R}^n$:ssä ja $I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy$ sen kertalukua α oleva Riesz'in potentiaali, $0 < \alpha < n$.

a) Osoita kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < R < \infty$ ja $1 < p < \infty$ arviot

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy \leq C\, R^\alpha\, Mf(x) \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha} dy \leq C \|f\|_{L^p} R^{\alpha - \frac{n}{p}}$$

missä Mf on f:n Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio ja vakio $C < \infty$ riippuu vain n:stä, α:sta ja p:stä.

b) Valitsemalla sopiva säde R todista että

$$\|I_\alpha f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

[Vihjeet: a) ensimmäisessä arviossa tarkastele renkaita $B(x, 2^{-j}R) \setminus B(x, 2^{-j-1}R)$, $j \in \mathbb{N}$. b)-kohdassa todista, että $I_\alpha f(x) \leq C \|f\|_p^{\alpha p/n} Mf(x)^{1-\alpha p/n}$ ja hyödynnä maksimaalifunktion ominaisuuksia (perustele vastauksesi)]

Matematiikan laitos
Harmoninen analyysi, Loppukoe 10.8.2005

1. a) Määrittele Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio Mf, kun $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $1 \leq p \leq \infty$.

b) Olkoon f mitallinen $\mathbb{R}^n$:ssä. Näytä, että on sellainen vain n:stä riippuva vakio $c(n) < \infty$, että kaikille $t > 0$ ja $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\{|y-x|>t\}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}} dy \leq \frac{c(n)}{t} Mf(x)$$

2. Kerro mitä ovat A_p painot, $1 \leq p < \infty$. Jos ω_1, ω_2 ovat A_1-painoja, näytä että

$$\omega_1 (\omega_2)^{1-p} \in A_p, \qquad 1 < p < \infty$$

3. Jos mitta $d\mu = \omega(x)dx$ on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, merkitään $\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$. Oletamme, että Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio on rajoitettu $L^p(\mu)$:ssä,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mg(x))^p \, \omega(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^p \omega(x)dx, \qquad g \in L^p(\mu)$$

Näytä että tällöin jokaiselle kuutiolle $Q \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$\frac{\omega(E)}{\omega(Q)} \geq C_1 \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^p, \qquad E \subset \mathbb{R}^n \text{ mitallinen}$$

4. Määrittele säännölliset Calderon-Zygmund ytimet $K(x)$ kaikissa dimensioissa n. Tarkastele vastaavaa integraalioperaattoria

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)dy, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty,$$

ja kerro pääkohdittain, miten osoitetaan että $\|T_\varepsilon f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$, missä C on riippumaton ε:sta, ja että $Tf = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon f$ suppenee L^p-normin mielessä.

5. Olkoon T säännöllisen Calderon-Zygmund ytimen määräämä integraalioperaattori. Todista Kolmogorovin lause: Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, niin $Tf \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^n)$ kaikilla $0 < r < 1$. Lisäksi pätee arvio

$$\int_E |Tf(x)|^r dx \leq \frac{C}{1-r} |E|^{1-r} \|f\|^r_{L^1}, \qquad 0 < |E| < \infty.$$

[Vihje: Integroi Tf:n jakaumafunktiota (distribution function)]

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harmoninen analyysi, Loppukoe 9.8.2006

1. Jos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, näytä, että Fourierin muunnos $\hat{f}(k)$ on jatkuva kaikilla $k \in \mathbb{R}^n$. Anna myös esimerkki funktiosta $f \in L^1(\mathbb{R})$, jolle $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

2. a) Kerro mitä ovat A_1-painot, ja anna esimerkki painosta $\omega \in A_1 \setminus L^\infty$.

b) Osoita, että $\log \omega \in BMO$ kaikilla $\omega \in A_1$.

Yllä $f \in BMO \Leftrightarrow \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx \leq C_0$ kaikilla kuutioilla Q; tässä $f_Q = \int_Q f(x)dx$ on f:n keskiarvo yli kuution Q ja vakio $C_0 < \infty$ ei riipu kuutiosta Q.

[Vihje: Käytä Jensenin epäyhtälöä, $\phi\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right) \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \phi(|f(x)|)dx$ missä ϕ on konveksi funktio.]

3. Kerro mitä sanoo Cotlarin epäyhtälö. Kuvaile (lyhyesti) miten sitä voidaan käyttää Calderon-Zygmund operaattoreiden teoriassa.

4. Tarkastellaan vektorikenttää $W \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Osoita, että

$$\operatorname{Div} W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n R_j W_j = 0,$$

missä R_j on j:s Rieszin muunnos avaruudessa $\mathbb{R}^n$. (Perustele päättelysi).

5. Kerro mitä ovat A_p painot, kun $1 < p < \infty$. Määrittele myös Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktio Mf, kun $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Osoita, että jos $1 < p < \infty$ ja maksimaalifunktio on rajoitettu avaruudessa $L^p(\omega)$, eli

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, \omega(x)dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, \omega(x)dx \quad \text{kaikilla } f \in L^p(\omega),$$

niin silloin paino $\omega \in A_p$.

[Vihje: Jos M on (painotetussa avaruudessa) heikkoa tyyppiä (p,p), näytä että

$$\omega(Q)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx\right)^p \leq c_1 \int_Q |f(x)|^p \omega(x)dx$$

kaikilla kuutioilla Q ja funktioilla f. Osoita sitten, että tämä arvio on yhtäpitävä ehdon $w \in A_p$ kanssa.]