Från DI till matematiklärare
Analys I, 2004–2005
Slutförhör
21.3.2005

1. Antag att funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är kontinuerlig i punkten a och att $f(a) < 1$. Visa utgående direkt från definitionen av kontinuitet (utan att använda satsen om mellanliggande värden eller Bolzanos sats) at det existerar ett sådant tal x att $a < x < a + \frac{1}{3}$ och $f(x) < 1$.

2. Låt $x_0 \in \mathbf{R}$ och antag att f och g är sådana funktioner att varje omgivning av x_0 innehåller en sådan punkt x att $x \neq x_0$ och $x \in D_f \cap D_g$. Antag även att $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Visa att $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = A + B$.

   Detta är beviset av en sats i kompendiet. Uppgiften skall lösas med samma utgångspunkter som beviset i kompendiet har, dvs det som i kompendiet kommer före satsen i fråga får användas.

3. Funktionen $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$ ges av $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Visa att f inte är likformigt kontinuerlig.

4. Visa utgående direkt från derivatans definition att derivatan av funktionen $\sqrt{x}$ i punkten $x > 0$ är
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

5. Beräkna
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}.$$