Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geostatistiikka

Loppukoe 9.8.2006

Kirjoita vastauspaperiin **nimesi** lisäksi **opiskelijanumero** tai **henkilötunnus**.

Tuloksia, joita voi käyttää ilman todistusta (a_i't, b_j't ja c_{ij}'t vakioita, X, X_i't ja Y_j't satunnaismuuttujia):

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathrm{E}\, X_i$$

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\, X)^2 = \mathrm{E}\, X^2 - (\mathrm{E}\, X)^2 = \operatorname{Cov}(X, X)$$

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}\, X)(Y - \mathrm{E}\, Y)] = \operatorname{Cov}(Y, X)$$

$$\operatorname{var}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

$$\operatorname{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{Cov}(X_i, Y_j)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j c_{ij} = 2\sum_{j=1}^{n} a_j c_{ij} \qquad \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = b_i,$$

missä $\frac{\partial}{\partial x} f$ on (x:n ja mahdollisesti joidenkin muiden muuttujien) funktion f osittaisderivaatta x:n suhteen.

1. Olkoon $Z(x)$ heikosti stationaarinen satunnaisfunktio, jolle $\mathrm{E}\, Z(x) = 0$ kaikilla x, ja jolle satunnaismuuttujien $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$, $\alpha = 0, 1, \ldots, N$, kovarianssit

$$\sigma_{\alpha\beta} = \operatorname{Cov}(Z_\alpha, Z_\beta), \qquad \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, N$$

oletetaan tunnetuiksi. Johda

a) ns. simple kriging -yhtälöt Z_0:n lineaarisen ennusteen

$$Z^* = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_\alpha Z_\alpha$$

sellaisille kertoimille λ_α, jotka minimoivat ennusteen odotetun keskineliövirheen $\mathrm{E}(Z^* - Z_0)^2$, sekä

b) minimoidun keskineliövirheen (simple kriging -varianssin) lauseke.

2. Määrittele lyhyesti (sanoin tai kaavoin) seuraavat käsitteet

a) sisäinen stationaarisuus

b) variogrammin vaikutusväli

c) geometrinen epäisotrooppisuus

d) screening effect

e) factorial kriging

f) indicator kriging

3. Olkoot

$Y(x)$ heikosti stationaarinen satunnaisfunktio kovarianssifunktiolla $C_Y(h)$ ja variogrammilla $\gamma_Y(h)$,

$e(x)$ toinen heikosti stationaarinen satunnaisfunktio, jolle

$$\mathrm{Cov}(e(x), e(y)) = \begin{cases} \tau^2, & y = x, \\ 0, & y \neq x, \end{cases} \text{ ja}$$

$$\mathrm{Cov}(Y(x), e(y)) = 0 \qquad \text{kaikilla } x \text{ ja } y, \text{ ja}$$

M reaaliarvoinen satunnaismuuttuja, jolle

$$\mathrm{var}\, M = \tau^2 \text{ ja}$$
$$\mathrm{Cov}(Y(x), M) = \mathrm{Cov}(e(x), M) = 0 \text{ kaikilla } x.$$

Esitä satunnaisfunktioiden

$$Z_1(x) = Y(x) + e(x) \text{ ja}$$
$$Z_2(x) = Y(x) + M$$

variogrammien $\gamma_1(h)$ ja $\gamma_2(h)$ sekä suorien ja ristikovarianssifunktioiden $C_{ij}(h) = \mathrm{Cov}(Z_i(x), Z_j(x+h))$, $i, j = 1, 2$, lausekkeet $C_Y(h)$:n, $\gamma_Y(h)$:n ja τ^2:n avulla.

Muista, että *heikosti stationaariselle* $Z(x)$ pätee $\gamma_Z(h) = C_Z(0) - C_Z(h)$.

4. Olkoot $Z_1(x)$ ja $Z_2(x)$ heikosti stationaarisia satunnaisfunktioita, joille

$$\mathrm{E}\, Z_1(x) = \mathrm{E}\, Z_2(x) = 0 \text{ kaikilla } x,$$
$$\mathrm{Cov}(Z_i(x), Z_i(x+h)) = C(h),\ i = 1, 2, \text{ ja}$$
$$\mathrm{Cov}(Z_1(x), Z_2(x+h)) = \mathrm{Cov}(Z_2(x), Z_1(x+h)) = \rho C(h)$$

Satunnaisfunktiota $Z_1(x)$ on havaittu paikoissa a ja c ja satunnaisfunktiota $Z_2(x)$ näissä samoissa paikoissa sekä lisäksi paikassa b, eli

$$\boldsymbol{Z}_1 = \begin{bmatrix} Z_1(a) \\ Z_1(c) \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{Z}_2 = \begin{bmatrix} Z_2(a) \\ Z_2(c) \\ Z_2(b) \end{bmatrix}.$$

Satunnaismuuttujan $Z_0 = Z_1(b)$ simple cokriging -ennusteen

$$Z^{**} = \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{\lambda}_i^T \boldsymbol{Z}_i$$

kerroinvektorit

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{bmatrix} \text{ ja } \boldsymbol{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{23} \end{bmatrix}$$

toteuttavat yhtälöt

$$\sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{C}_{ij} \boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{c}_{i0} \qquad i = 1, 2,$$

missä

$$\boldsymbol{C}_{ij} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{Z}_j) \text{ ja } \boldsymbol{c}_{i0} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{Z}_i, Z_0).$$

Laske simple cokriging -kerrointen λ_{ij} arvot, kun

$$C(0) = 4,$$
$$C(b-a) = C(a-b) = C(c-b) = C(b-c) = 2,$$
$$C(a-c) = C(c-a) = 0 \text{ ja}$$
$$\rho = \frac{1}{2}.$$

Tässä tehtävässä ei ole tarkoitus testata niinkään yhtälönratkaisutekniikkaa kuin cokriging-yhtälöiden ymmärrystä. Eli ei kannata masentua, jos yhtälöiden ratkaiseminen tuntuu vaikealta, eikä käyttää siihen koko kurssikoeaikaa. Oikein auki kirjoitetuista yhtälöistä saa jo 4p ja hyvästä ratkaisuyrityksestä viidennen.

5. Disjunctive kriging: käyttötarkoitus, periaate ja vertailu muihin samaan tarkoitukseen soveltuviin menetelmiin.