

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Geometria

2. koe

17.12.2007

- (1) Määritä se affini kuvaus, joka kuvaa pisteet $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ pisteiksi $(1, 1)$, $(4, 0)$ ja $(0, 1)$.
- (2) Määritä niiden ellipsien yhtälöt, joiden polttopiste on $(2, 0)$ ja johtosuora on $x = 0$. Kulkeeko näistä ellipseistä mikään pisteen $(1, 0)$ kautta?
- (3) Määritä paraabelin $y = ax^2$ huippuun piirretyn pääkaarevuusympyrän keskipiste ja säde.
- (4) Olkoon l ellipsin jänne. Otetaan kaikista jänteen l kanssa yhdensuuntaisista jänteistä keskipisteet. Osoita, että nämä keskipisteet sijaitsevat samalla suoralla.

Geometria

2. kurssikoe

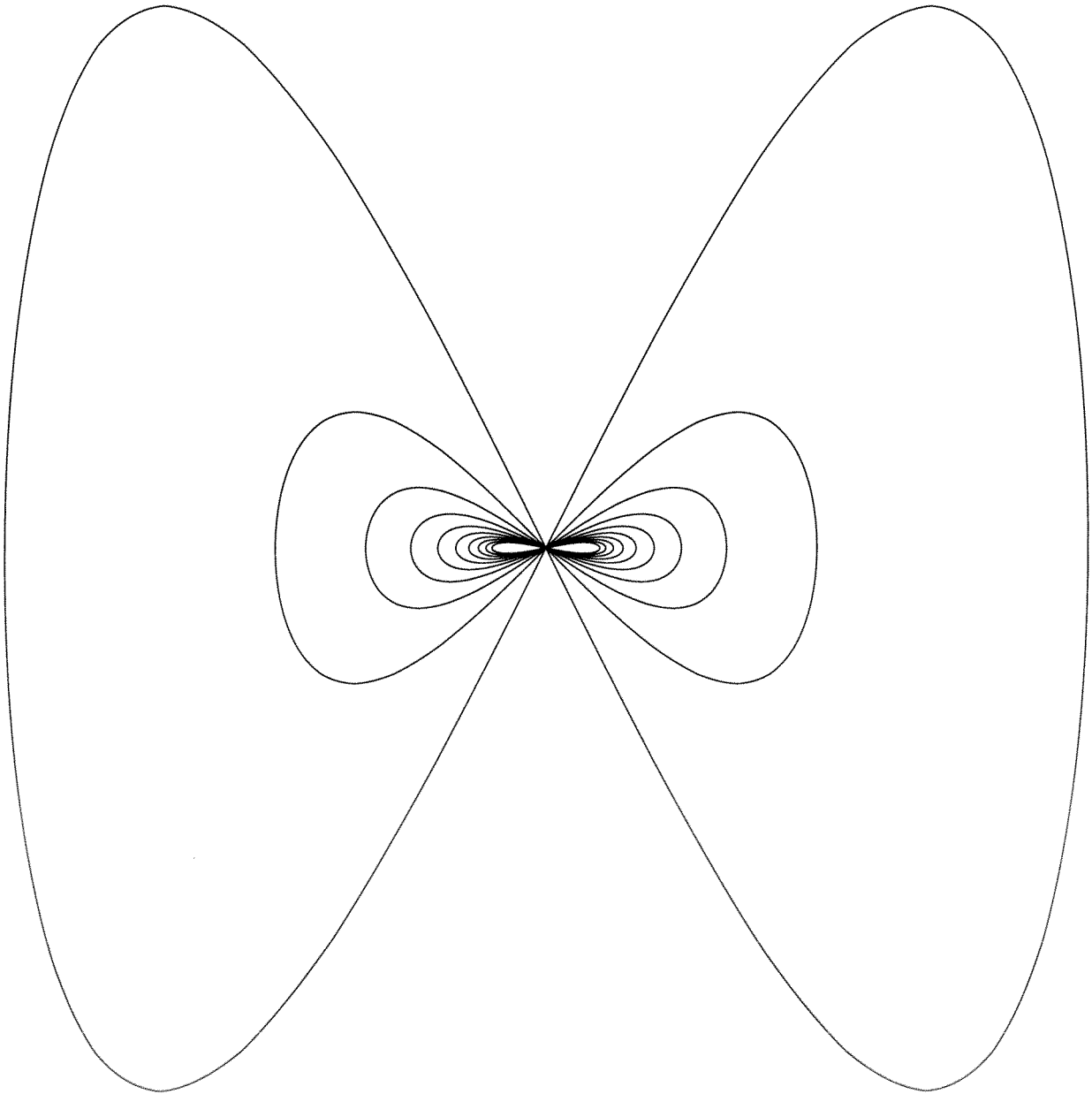
5.5.2008

1. Olkoon F_i peilaus tasossa suoran ℓ_i suhteen, $i = 1, 2$. Merkitsemme F :llä yhdistettyä kuvausta $F_2 \circ F_1$. Näytä, että tällöin on voimassa:
 - (a) Jos suorat ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaiset, niin F on siirto.
 - (b) Jos suorat ℓ_1 ja ℓ_2 leikkaavat pisteessä P , niin F on kierto pisteen P ympäri.
2. Olkoon Y O -keskinen, R -säteinen ympyrä tasossa ja P ympyrän Y ulkopuolella oleva tason piste, jonka etäisyys keskipisteestä O on d . Määritä ne vakion k arvot, joilla ympyrän Y kuvaympyrä homotetiassa $P[k]$ sivuaa ympyrää Y .
3. *Geronon lemniskaatta* eli *kahdeksikkokäyrä* muodostuu niistä pisteistä P' , jotka liittyvät yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ pisteisiin P seuraavasti. Merkitsemme Q :lla pisteen P kautta kulkevan vaakasuoran ja suoran $x = 1$ leikkauspistettä ja merkitsemme edelleen ℓ :llä pisteen Q ja origon kautta kulkevaa suoraa. Piste P' on suoran ℓ ja pisteen P kautta kulkevan pystysuoran leikkauspiste.
 - (a) Näytä, että Geronon lemniskaatta on yksikköympyrän kuva kuvauksessa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä $f(x, y) = (x, xy)$. Johda lemniskaatalle parametriesitys $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
 - (b) Olkoon luvuille s ja t voimassa $0 \leq s < t \leq 2\pi$. Merkitsemme $x_0 = x(s)$, $y_0 = y(s)$, $x_3 = x(t)$ ja $y_3 = y(t)$. Määritä sellaiset kontrollipisteet $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$, että PostScript komentojonon “ $x_0 y_0 moveto x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 curveto$ ” määrittämällä Bezier-käyrällä on pisteissä $P_0 = (x_0, y_0)$ ja $P_3 = (x_3, y_3)$ samansuuntaiset tangentit kuin lemniskaatalla.
4. Kirjoita PostScript aliohjelma f , jolle annetaan pinon päällä luvut x ja y ja joka vaihtaa niiden tilalle luvut x ja xy . Kirjoita sitten PostScript-ohjelma, jonka alussa annetaan muuttujalle k arvoksi joku luonnollinen luku, vaikkapa 10; ohjelman tulisi piirtää näkyviin tehtäväpaperin kääntöpuolella esitetyn kaltainen “lemniskaattaparvi”. Parven käyrät ovat origokeskisten $\frac{2}{i}$ -säteisten ympyröiden, $i = 1, \dots, k$, kuvia kuvauksessa $f : (x, y) \mapsto (x, xy)$. Voit käyttää ohjelmassasi Casselmanin kirjassa esiteltyjä aliohjelmia *ctransform* ja *subdivide*. Aliohjelmalle *ctransform* annetaan parametrina (pinon päällä) aliohjelman f nimi $/f$ ja *ctransform* muuntaa sen suoritushetkellä voimassaolevan, ympyrää (tai ympyräparvea) esittävän kuviopolun, lemniskaattaa (tai lemniskaattaparvea) esittäväksi kuviopoluksi. (Ympyröiden kuvista tulee oikean muotoisia, jos kuviopolkua pilkotaan ohjelmanpätkällä *subdivide subdivide subdivide* ennen *ctransform*-aliohjelman suoritusta.)

[*Vihje tehtävään 1:* Tason isometrioiden luokittelu. *Vihje kohtaan (b):* Jokaisella pisteellä P , suoran ℓ_i jokainen piste on yhtä kaukana pisteistä P ja $F_i(P)$.]

[*Ohje tehtävän 3(a) alkuosaan:* Piirrä kuva ja määritä pisteen P' y -koordinaatti kolmioiden yhdenmuotoisuuden tai suorien yhtälöiden avulla. *Ohje loppuosaan:* Johda parametriesitys alkuosan tuloksen avulla yksikköympyrän tavallisesta parametriesityksestä.]

[*Muistutus tehtävään 4:* Varmista, ettei kuviopolkuihin tule komennon *arc* yhteydessä mitään ylimääräisiä janoja.]



Summary of some PostScript commands

The symbol \emptyset means no arguments, or no return value.

1. Mathematical functions

Arguments	Command	Left on stack; side effects
$x y$	add	$x + y$
$x y$	sub	$x - y$
$x y$	mul	xy
$x y$	div	x/y
$x y$	idiv	the integral part of x/y
$x y$	mod	the remainder of x after division by y
x	abs	the absolute value of x
x	neg	$-x$
x	ceiling	the integer just above x
x	floor	the integer just below x
x	round	x rounded to nearest integer
x	truncate	x with fractional part chopped off
x	sqrt	square root of x
$x y$	atan	the polar argument of the point (x, y)
x	cos	$\cos x$ (x in degrees)
x	sin	$\sin x$ (x in degrees)
$x y$	exp	x^y
x	ln	$\ln x$
x	log	$\log x$ (base 10)

2. Stack operations

x	pop	\emptyset
$x y$	exch	$y x$
x	dup	$x x$
$x_0 \dots x_{n-1} n i$	roll	$x_i \dots x_0 \dots x_{i-1} n i$

3. Dictionaries

name item	def	makes an entry in the current dictionary
n	dict	puts a dictionary of n null entries on the stack
dictionary d	begin	opens d for use
	end	closes the last dictionary opened

4. Conditionals

The first few return 'boolean' constants true or false. A few others have boolean values as arguments.

$x y$	eq	$x = y?$
$x y$	ne	$x \neq y?$
$x y$	ge	$x \geq y?$
$x y$	gt	$x > y?$
$x y$	ge	$x \geq y?$
$x y$	gt	$x > y?$
$x y$	le	$x \leq y?$
$x y$	lt	$x < y?$
$s t$	and	s and t are both true?
$s t$	or	at least one of s and t is true?
s	not	s is not true?
$s \{ \dots \}$	if	executes the procedure if s is true
$s \{ \dots \} \{ \dots \}$	ifelse	executes the first procedure if s is true, otherwise the second

5. Arrays

an array a	length	number of items in the array a
$a\ i$	get	a_i
$a\ i\ j$	getinterval	$a_i \dots a_j$
a	aload	$a_0 \dots a_{\ell-1}$ a (ℓ is the length of a)

6. Loops

$i\ h\ f\ \{\dots\}$	for	steps through the loop from i to f , incrementing by h
$n\ \{\dots\}$	repeat	executes the procedure n times
$\{\dots\}$	loop	executes the procedure until <code>exit</code> is called from within the procedure
\emptyset	exit	exits the loop it is contained in

7. Graphics state

\emptyset	gsave	saves the current graphics state, installs a new copy of it
\emptyset	grestore	brings back the last graphics state
x	setlinewidth	sets current linewidth to x (in current units)
x	setlinecap	determines how lines are capped
x	setlinejoin	determines how lines are joined
$[\dots]x$	setdash	sets current dash pattern
g	setgray	sets current colour to a shade of grey
$r\ g\ b$	setrgbcolor	sets current colour

8. Coordinates

Here, a matrix is an array of 6 numbers. The CTM is the **C**urrent **T**ransformation **M**atrix.

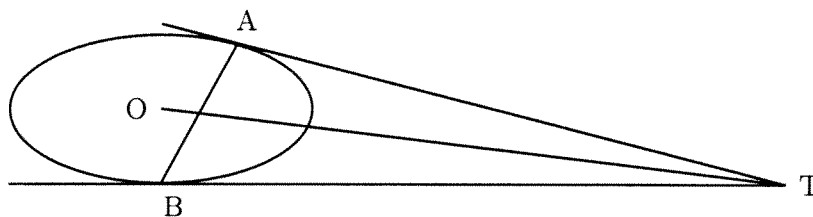
\emptyset	matrix	puts a matrix on the stack
matrix m	defaultmatrix	fills m with the default TM, leaves it on the stack
m	currentmatrix	fills the matrix with the current CTM, leaves it
$x\ y$	translate	translates the origin by $[x, y]$
$a\ b$	scale	scales x by a , y by b
m	concat	multiplies the CTM by m
$m_1\ m_2\ m_3$	concatmatrix	fills m_3 with the matrix product $m_1 m_2$
$x\ y$	transform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by the CTM
$x\ y\ m$	transform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by m
$x\ y$	itransform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by the inverse of the CTM
$x\ y\ m$	itransform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by the inverse of m
$m_1\ m_2$	invertmatrix	m_2 (the matrix m_2 is filled by the inverse of m_1)

9. Drawing

\emptyset	newpath	starts a new path, deleting the old one
\emptyset	currentpoint	the current point $x\ y$ in device coordinates
$x\ y$	moveto	begins a new piece of the current path
$x\ y$	lineto	adds a line to the current path
$x\ y$	rmoveto	relative move
$x\ y$	rlineto	relative line
$x\ y\ r\ a\ b$	arc	adds an arc from a to b , centred at (x, y) , of radius r
$x\ y\ r\ a\ b$	arcn	negative direction
$x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3$	curveto	adds a Bezier curve to the current path
\emptyset	closepath	closes up the current path back to the last point moved to
\emptyset	stroke	draws the current path
\emptyset	fill	fills the outline made by the current path
\emptyset	clip	clips drawing to the region outlined by the current path

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
2. kurssikoe
27.4.2009

1. Olkoon $y = -2$ parabelin johtosuora. Määritä parabelin polttopiste, jos sen huippu on pisteessä $(0, 0)$. Laske parabelin yhtälö.
2. Määritä hyperbelin $xy = 1$ huippuun $(1, 1)$ piirretyn pääkaarevuusympyrän keskipiste ja säde. Hahmottele kuva tilanteesta.
3. Määritä se affiini kuvaus, joka kuvaa pisteet $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ pisteiksi $(1, 1)$, $(4, 0)$ ja $(0, 1)$. Mikä on suoran $y = x$ kuva tassa kuvauksessa? Anna kuvasuora muodossa $y = \dots$



4. Oletetaan, että ellipsin pisteisiin A ja B piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä T . Osoita, että pisteen T ja ellipsin keskipisteen O kautta piirretty suora puolittaa janan AB .

Kiitos kaikille kurssille osallistuneille.

