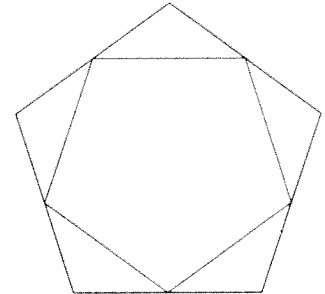


Geometria

1. kurssikoe

25.2.2008

1. Kun säännöllisen viisikulmion vierekkäisten sivujen keskipisteet yhdistetään janoilla, saadaan viereisen kuvan mukainen säännöllisen viisikulmion sisään piirretty säännöllinen viisikulmio. Merkitsemme s :llä säännöllisen viisikulmion sivun pituuden suhdetta sisään piirretyn säännöllisen viisikulmion sivun pituuteen.

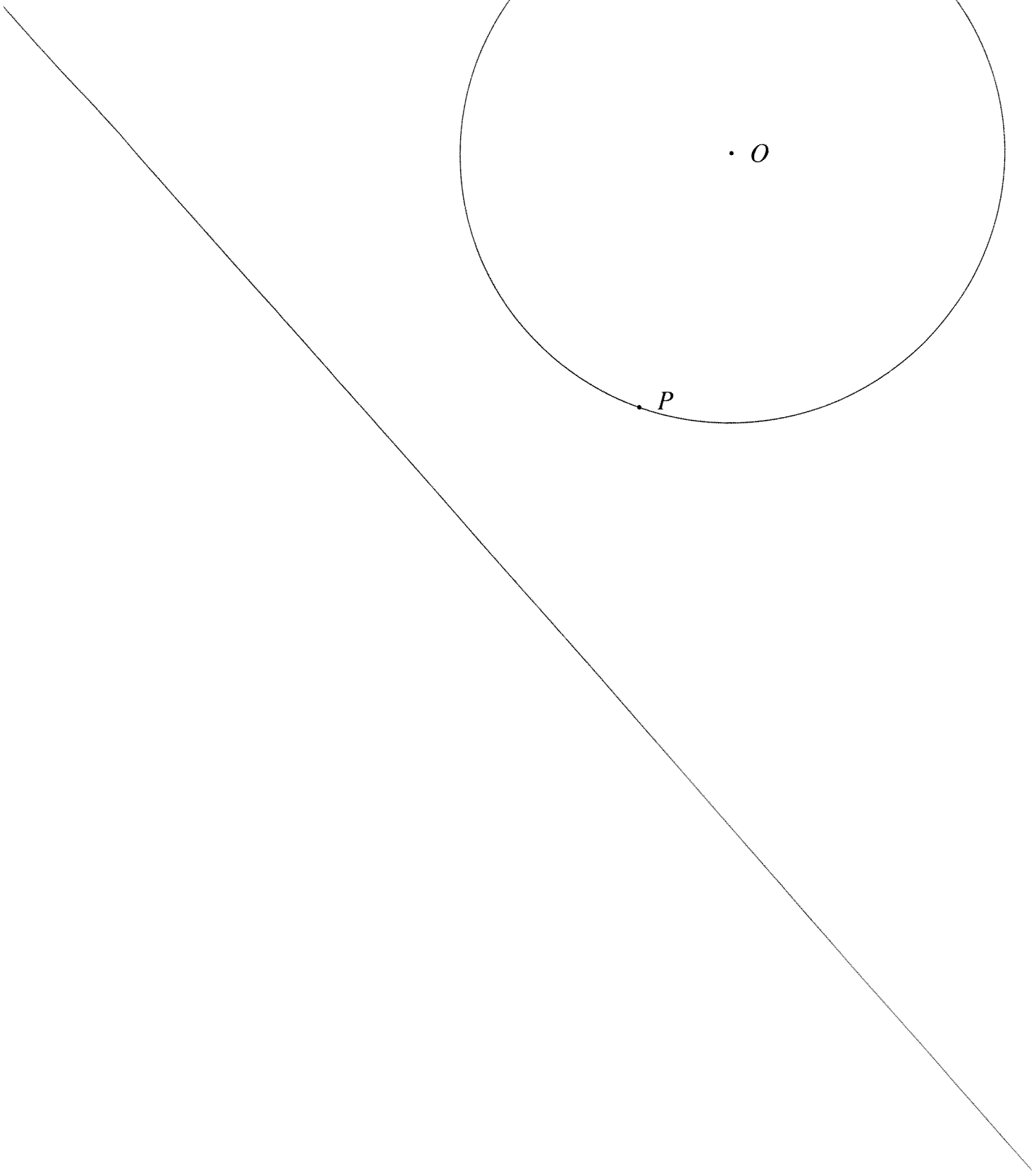
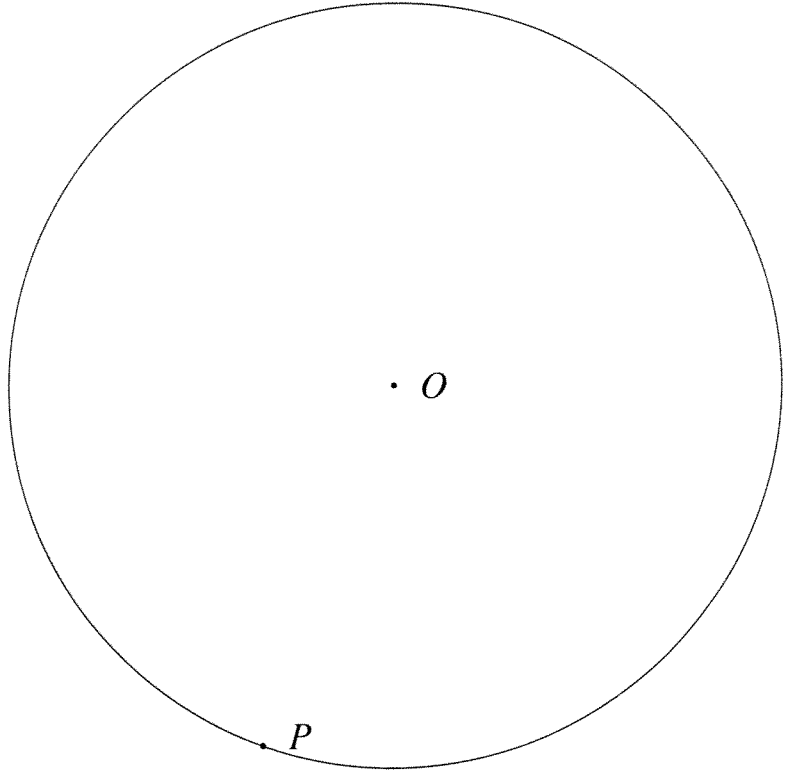


(a) Anna s :lle lauseke trigonometristen funktioiden avulla.

(b) Anna s :lle lauseke, jossa ei esiinny trigonometrisia funktioita; siinä voi kuitenkin esiintyä "kultainen luku" ϕ .

2. Kolmion kulmat ovat suuruuksiltaan α , β ja γ . Olkoot P , Q ja R ne pisteet, joissa kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion kylkiä. Määritä kolmion PQR kulmien suuruudet.
3. Koepaperin kääntöpuolelle on kuvattu suora ja ympyrä sekä ympyrän keskipiste ja eräs ympyrän piste P . Konstruoi harpin ja viivoittimen avulla sellainen ympyrä, joka sivuaa suoraa jossain pisteessä ja ympyrää pisteessä P . Anna myös konstruktiollesi lyhyt sanallinen selitys ja perustelu. (Halutessasi voit piirtää kuvat jollekin muulle paperille.)
4. Kirjoita PostScript-ohjelma, joka piirtää näkyviin yllä näkyvän kuvion kaltaisen kuvion, missä ulomman viisikulmion sivun pituus on noin 10 cm.

[*Vihje Tehtävään 3:* Ympyrän keskipisteen on oltava yhtä kaukana annetusta suorasta ja ympyrää pisteessä P sivuavasta suorasta.]



Summary of some PostScript commands

The symbol \emptyset means no arguments, or no return value.

1. Mathematical functions

Arguments	Command	Left on stack; side effects
$x y$	add	$x + y$
$x y$	sub	$x - y$
$x y$	mul	xy
$x y$	div	x/y
$x y$	idiv	the integral part of x/y
$x y$	mod	the remainder of x after division by y
x	abs	the absolute value of x
x	neg	$-x$
x	ceiling	the integer just above x
x	floor	the integer just below x
x	round	x rounded to nearest integer
x	truncate	x with fractional part chopped off
x	sqrt	square root of x
$x y$	atan	the polar argument of the point (x, y)
x	cos	$\cos x$ (x in degrees)
x	sin	$\sin x$ (x in degrees)
$x y$	exp	x^y
x	ln	$\ln x$
x	log	$\log x$ (base 10)

2. Stack operations

x	pop	\emptyset
$x y$	exch	$y x$
x	dup	$x x$
$x_0 \dots x_{n-1} n i$	roll	$x_i \dots x_0 \dots x_{i-1} n i$

3. Dictionaries

name item	def	makes an entry in the current dictionary
n	dict	puts a dictionary of n null entries on the stack
dictionary d	begin	opens d for use
	end	closes the last dictionary opened

4. Conditionals

The first few return 'boolean' constants true or false. A few others have boolean values as arguments.

$x y$	eq	$x = y?$
$x y$	ne	$x \neq y?$
$x y$	ge	$x \geq y?$
$x y$	gt	$x > y?$
$x y$	ge	$x \geq y?$
$x y$	gt	$x > y?$
$x y$	le	$x \leq y?$
$x y$	lt	$x < y?$
$s t$	and	s and t are both true?
$s t$	or	at least one of s and t is true?
s	not	s is not true?
$s \{ \dots \}$	if	executes the procedure if s is true
$s \{ \dots \} \{ \dots \}$	ifelse	executes the first procedure if s is true, otherwise the second

5. Graphics state

\emptyset	gsave	saves the current graphics state, installs a new copy of it
\emptyset	grestore	brings back the last graphics state
x	setlinewidth	sets current linewidth to x (in current units)
x	setlinecap	determines how lines are capped
x	setlinejoin	determines how lines are joined
[. . .] x	setdash	sets current dash pattern
g	setgray	sets current colour to a shade of grey
$r\ g\ b$	setrgbcolor	sets current colour

6. Coordinates

Here, a matrix is an array of 6 numbers. The CTM is the **C**urrent **T**ransformation **M**atrix.

\emptyset	matrix	puts a matrix on the stack
matrix m	defaultmatrix	fills m with the default TM, leaves it on the stack
m	currentmatrix	fills the matrix with the current CTM, leaves it
$x\ y$	translate	translates the origin by $[x, y]$
$a\ b$	scale	scales x by a , y by b
m	concat	multiplies the CTM by m
$m_1\ m_2\ m_3$	concatmatrix	fills m_3 with the matrix product $m_1 m_2$
$x\ y$	transform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by the CTM
$x\ y\ m$	transform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by m
$x\ y$	itransform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by the inverse of the CTM
$x\ y\ m$	itransform	$x'\ y'$, transform of $x\ y$ by the inverse of m
$m_1\ m_2$	invertmatrix	m_2 (the matrix m_2 is filled by the inverse of m_1)

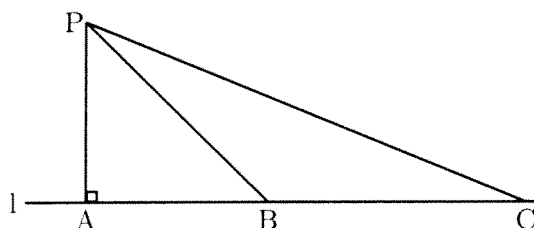
7. Drawing

\emptyset	newpath	starts a new path, deleting the old one
\emptyset	currentpoint	the current point $x\ y$ in device coordinates
$x\ y$	moveto	begins a new piece of the current path
$x\ y$	lineto	adds a line to the current path
$x\ y$	rmoveto	relative move
$x\ y$	rlineto	relative line
$x\ y\ r\ a\ b$	arc	adds an arc from a to b , centred at (x, y) , of radius r
$x\ y\ r\ a\ b$	arcn	negative direction
$x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3$	curveto	adds a Bezier curve to the current path
\emptyset	closepath	closes up the current path back to the last point moved to
\emptyset	stroke	draws the current path
\emptyset	fill	fills the outline made by the current path
\emptyset	clip	clips drawing to the region outlined by the current path

- (1) **Elementa.** Olkoot l suora ja P piste, $P \notin l$. Konstruoi suoralle l normaali pisteen P kautta.

Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1–P4 ja Elementan lauseita I.1–I.10.

- (2) **Absoluuttinen geometria.**



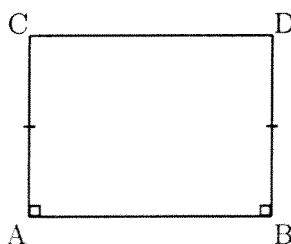
Olkoon l suora ja P piste, joka ei kuulu suoralle l . Pisteestä P piirretään normaali PA suoralle l . Suoralla l asetetaan $AB = AP$ ja $BC = BP$. Näytä, että $\angle PCA \leq R/4$.

Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1–P4, Elementan lauseita I.1–I.28 ja Saccherin–Legendren 1. lausetta.

- (3) **Hilbertin aksioomat.** Olkoon l suora. Osoita, että on olemassa pisteet P ja R , jotka eivät ole suoran l pisteitä ja jotka ovat eri puolella suoraa l .

Ohje: Ratkaisun kaikkien välivaiheiden tulee pohjautua Hilbertin aksioomiin.

- (4) **Hyperbolinen geometria.**



Olkoon ABCD Saccherin nelikulmio: kulmat A ja B ovat suorakulmia ja $AC=BD$. Näytä hyperbolisessa geometriassa, että kulmat C ja D ovat yhtäsuuret ja terävät.

Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1–P4, Elementan lauseita I.1–I.28, (yleistettyä) hyperbolista paralleelipostulaattia sekä tietoa kolmion kulmien summasta.

Postulaatti 1. Kaksi pistettä voidaan yhdistää janaalla.

Postulaatti 2. Jana voidaan jatkaa suoraksi.

Postulaatti 3. Olkoot pisteet P ja Q annettu. Tällöin voidaan piirtää ympyrä, jonka keskipiste on P ja jonka kehä kulkee pisteen Q kautta.

Postulaatti 4. Kaikki suorat kulmat ovat yhtäsuuria.

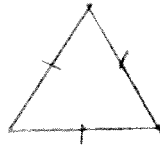
Postulaatti 5. (Paralleelipostulaatti) Jos suora n leikkaa suorat l ja m ja tässä muodostuvien sisäkulmien summa on alle kaksi suoraa kulmaa niin silloin l ja m leikkaavat toisensa sillä puolella suoraa n missä sisäkulmat ovat.



jos $x + y < 180^\circ$
niin l ja m
leikkaavat

ELEMENTA I.1-28

1. Tasasivuisen kolmion konstruointi



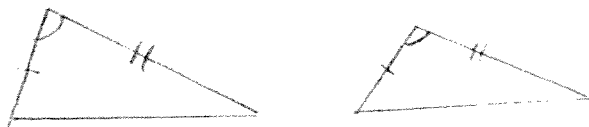
2. Janan siirtäminen alkamaan halutusta pisteestä



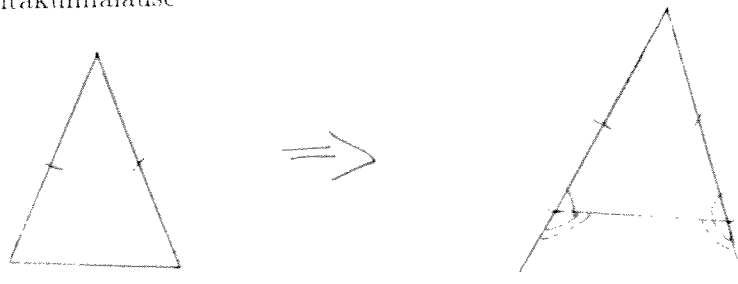
3. Janan siirtäminen toisen janan päälle



4. Ensimmäinen ylitenevyyslause: s-k-s



5. Kantakulmalause



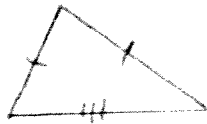
6. Käänteinen kantakulmalause



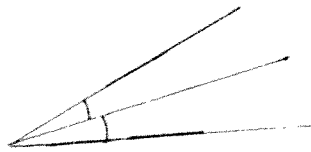
7. Kolmiot ovat "jäykkiä"



8. Toinen yhteneväisyyslause: s-s-s



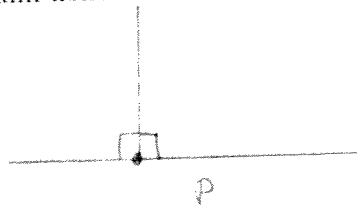
9. Kulmanpuolittajan konstruointi



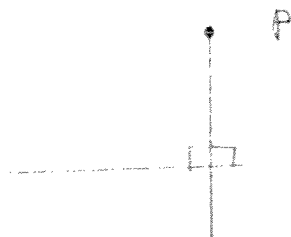
10. Janan keskipisteen konstruointi



11. Normaalin konstruointi suoralle suoran pisteeseen



12. Normaalin konstruointi suoralle suoran ulkopuolisen pisteen kautta

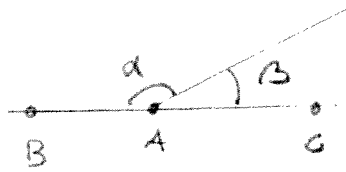


13. Kulmien summa suoralla on $2R$



$$\alpha + \beta = 2R$$

14. Jos $\alpha + \beta = 2R$ niin BA ja AC ovat samalla suoralla



15. Ristikulmat ovat yhtäsuuret



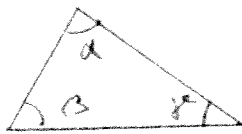
16. Kolmion ulkokulma on suurempi kuin kumpikaan vastaisista kulmista



$$\gamma > \alpha$$

$$\gamma > \beta$$

17. Kolmion kahden kulman summa on alle $2R$

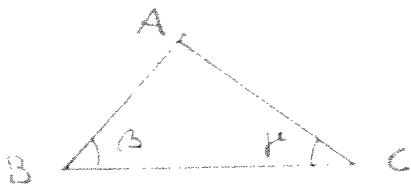


$$\alpha + \beta < 2R$$

$$\alpha + \gamma < 2R$$

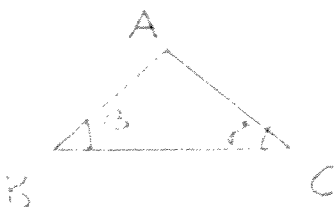
$$\beta + \gamma < 2R$$

18. Kolmiossa pitemmän sivun vastinkulma on suurempi



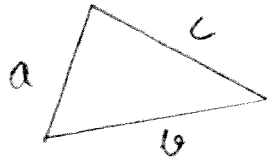
$$AC > AB \Rightarrow \beta > \gamma$$

19. Kolmiossa suuremman kulman vastinsivu on pitempi



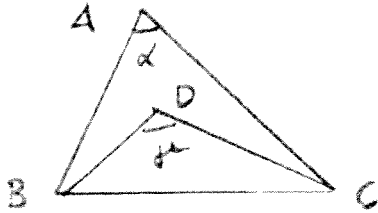
$$\beta > \gamma \Rightarrow AC > AB$$

20. Kolmiossa kahden sivun pituuksien summa on suurempi kuin kolmannen sivun pituus



$$\begin{aligned} a + b &> c \\ a + c &> b \\ b + c &> a \end{aligned}$$

21. Sisäkkäiset kolmiot



$$\begin{aligned} AB + AC &> DB + DC \\ \beta &> \alpha \end{aligned}$$

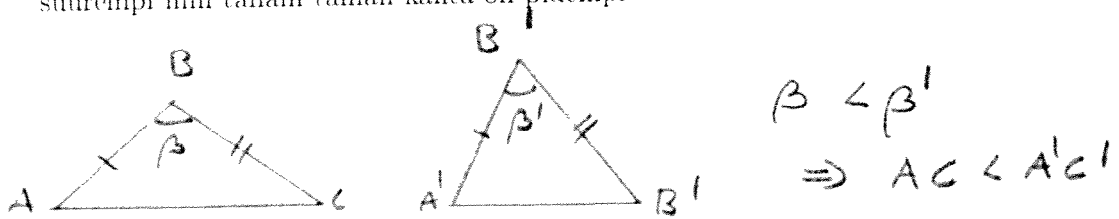
22. Kolmion konstruointi kolmesta annetusta janasta



23. Kulman siirtäminen



24. Jos kahdella kolmiolla on yhtäpitkät kyljet mutta toisen huippukulma on suurempi niin tällöin tämän kanta on pidempi

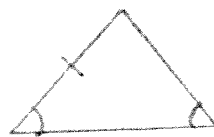


$$\begin{aligned} \beta &< \beta' \\ \Rightarrow AC &< A'C' \end{aligned}$$

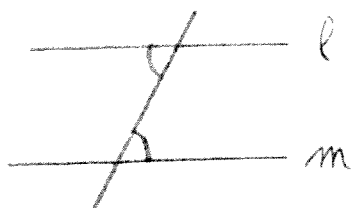
25. Jos kahdella kolmiolla on yhtäpitkät kyljet mutta toisen kanta on pidempi niin silloin tämän huippukulmakin on suurempi

$$\begin{aligned} AC &< A'C' \\ \Rightarrow \beta &< \beta' \end{aligned}$$

26. Kolmas yhtenevyyslause: k-s-k ja s-k-k

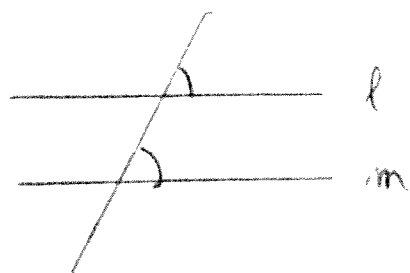


27. Yhdensuuntaisuus

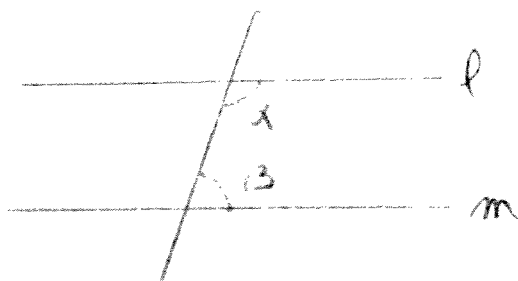


$$\Rightarrow l \parallel m$$

28. Yhdensuuntaisuus



$$\Rightarrow l \parallel m$$



$$\alpha + \beta = 2R$$

$$\Rightarrow l \parallel m$$

Incidence Axioms

AXIOM I-1. For every point P and for every point Q not equal to P there exists a unique line l that passes through P and Q .

AXIOM I-2. For every line l there exist at least two distinct points that are incident with l .

AXIOM I-3. There exist three distinct points with the property that no line is incident with all three of them.

Betweenness Axioms

AXIOM B-1. If $A * B * C$, then A , B , and C are three distinct points all lying on the same line, and $C * B * A$.

AXIOM B-2. Given any two distinct points B and D , there exist points A , C and E lying on \overleftrightarrow{BD} such that $A * B * D$, $B * C * D$ and $B * D * E$.

AXIOM B-3. If A , B , and C are three distinct points lying on the same line, then one and only one of the points is between the other two.

AXIOM B-4. For every line l and for any three points A , B , and C not lying on l :

- (i) if A and B are on the same side of l , and B and C are on the same side of l , then A and C are on the same side of l .
- (ii) if A and B are on opposite sides of l and B and C are on opposite sides of l , then A and C are on the same side of l .