Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
1. välikoe 29.3.2004

1. Tarkastellaan kahta risteävää suoraa ja niistä toisen pistettä A, joka ei ole suorien leikkauspiste. Piirrä harpilla ja viivaimella ympyrä, joka sivuaa molempia suoria ja niistä toista pisteessä A.

2. Todista, että jos kulman kärki on ympyrän sisäpuolella, niin kulman asteluku on kulmaan ja sen ristikulmaan jäävien ympyrän kaarien astelukujen keskiarvo.

3. Olkoon ABC kolmio ja P piste tasossa. Olkoot x, y ja z pisteen P etäisyydet kärjistä A, B ja C. Olkoot a, b ja c kärkien A, B ja C vastaisten sivujen pituudet. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Olkoot A', B' ja C' pisteestä P suorille BC, CA ja AB piirrettyjen normaalien kantapisteet. Olkoot a', b' ja c' kärkien A', B' ja C' vastaisten kolmion $A'B'C'$ sivujen pituudet. Osoita, että

$$a' = \frac{ax}{2R}, \quad b' = \frac{by}{2R} \quad \text{ja} \quad c' = \frac{cz}{2R}.$$

4. Oletetaan, että AB ja $A'B'$ ovat tason $\mathbb{R}^2$ janoja ja että $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $A' = (1,0)$ ja $B' = (1,3)$. Määritä kaikki tason yhdenmuotoisuuskuvaukset, jotka kuvaavat janan AB janaksi $A'B'$ niin, että $A \mapsto A'$ ja $B \mapsto B'$. Miksi joukoksi tällöin kuvautuu ympyrä $(x-1)^2 + y^2 = 1$?

(**Huom.** Tämän viikon harjoitustehtävässä 10:6 tulee lukea ”neljäkkääksi”, ei ”neliöksi”.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
1. välikoe 5.4.2004
(muutaman kanssa sovittu korvaava koe)

1. Piirrä harpilla ja viivaimella niiden pisteiden ura, joista annettu jana näkyy $120°$ suuruisessa kulmassa.

2. Todista, että jos kulman kärki on ympyrän ulkopuolella ja kyljet kohtaavat ympyrän, niin kulman asteluku on puolet kulmaan jäävien kaarien astelukujen erotuksesta.

3. Kolmion ABC kulma A on suora. Todista, että kulman B puolittaja kohtaa A:sta piirretyn korkeusjanan AD sellaisessa pisteessä E, että $AE : ED = BC : AB$.

4. Määritä kaikki tason $\mathbb{R}^2$ yhtenevyyskuvaukset, joissa ympyrän K: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ kuva on ympyrä K': $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ ja joissa vektorin $(1,0)$ suuntainen ympyrän K säde kuvautuu vektorin $(4,3)$ suuntaiseksi ympyrän K' säteeksi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
1. välikokeen uusinta 19.4.2004

1. Piirrä harpilla ja viivaimella suorakulmainen kolmio, jonka kateettien suhde on $2:3$ ja jonka hypotenuusa on annetun janan mittainen. Käytä vaikkapa homotetiaa.

2. Todista, että kolmion yhtä sivua vastaava korkeus on kolmion ympäripiirretyn ympyrän halkaisijan ja kolmion kahden muun sivun neljäs verto.

3. Osoita, että kaikki hyperbelit $y = \frac{a}{x}$, $a > 0$, ovat keskenään homoteettiset (homotetiasuhde positiivinen). Ovatko ne keskenään vastakkain homoteettiset (homotetiasuhde negatiivinen)?

4. Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on kuvaus, joka säilyttää etäisyydet, toisin sanoen

$$(*) \qquad |f(P) - f(Q) = |P - Q| \qquad \text{kaikilla pisteillä } P, Q \in \mathbb{R}^2.$$

Halutaan todistaa, että f on affiinikuvaus ja siis yhtenevyyskuvaus luentojen mielessä. Huomataan aluksi, että yhdistämällä f:n päälle ensin sopiva siirto, sitten sopiva kierto origon ympäri ja lopuksi tarvittaessa peilaus x-akselin suhteen voidaan olettaa, että $f(0,0) = (0,0)$, $f(1,0) = (1,0)$ ja $f(0,1) = (b,d)$ joillain $b,d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$. Osoita nyt, että f on identtinen kuvaus ja siis affiini. *Ohje.* Voisi olla hyödyllistä tutkia ehtoa $(*)$ pisteelle $P = (x,y)$ ja sopiville pisteille Q.

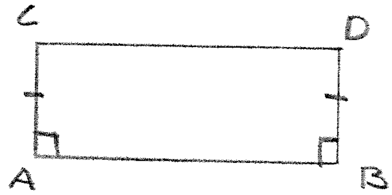
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
1. välikoe (korvaava)
21.3.2005

Tämän kokeen kesto on 1 tunti 55 minuuttia.

(1) **Absoluuttinen geometria.** Olkoon l suora ja P suoran piste. Osoita, että pisteen P kautta voidaan piirtää normaali suoralle l.

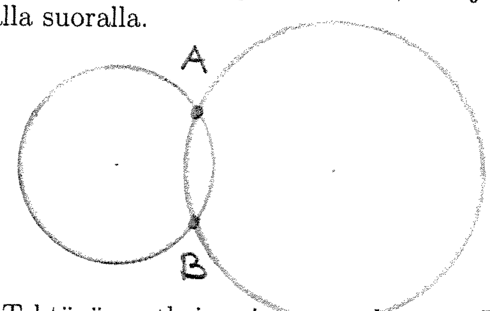
Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1-P4 sekä Elementan lauseita I.1-I.10.

(2) **Absoluuttinen geometria.** Olkoon $ABCD$ Saccherin nelikulmio, $\angle A = \angle B = R$ ja $AC = BD$. Osoita, että huippukulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat yhtäsuuret ja $\angle C = \angle D \leq R$.



Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1-P4, Elementan lauseita I.1-I.28 sekä Saccherin-Legendren 1. lausetta.

(3) **Hyperbolinen geometria.** Kaksi ympyrää leikkaa toisensa pisteissä A ja B. Pisteestä A piirretään ympyröille halkaisijat AC ja AD. Näytä hyperbolisessa geometriassa, että janat BC ja BD eivät ole samalla suoralla.



Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1-P4, Elementan lauseita I.1-I.28, hyperbolista paralleelipostulaattia sekä tietoa kolmion kulmien summasta.

(4) **Hilbertin aksioomat.** Olkoot A ja B eri pisteitä. Osoita, että $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.

Ohje: Ratkaisun kaikki välivaiheet tulee pohjautua Hilbertin aksiomiin.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
1. välikoe (korvaava)
31.3.2005

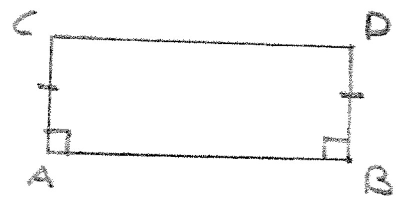
(1) **Absoluuttinen geometria.** Konstruoi kulmaan $\angle BAC$ kulmanpuolittaja.

Ohje: Voit olettaaa, että $\angle BAC$ on pienempi kuin $2R$. Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1-P4 sekä Elementan lauseita I.1-I.8.

(2) **Absoluuttinen geometria.** Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kolmioita, joille $\angle A = \angle A' = R$, $AB = A'B'$ ja $BC = B'C'$. Osoita, että $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhteneviä.

Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1-P4 ja Elementan lauseita I.1-I.28.

(3) **Hyperbolinen geometria.** Olkoon Olkoon $ABCD$ Saccherin nelikulmio, $\angle A = \angle B = R$ ja $AC = BD$. Osoita, että huippukulmat $\angle C$ ja $\angle D$ ovat yhtäsuuret ja $\angle C = \angle D < R$.



Ohje: Tehtävän ratkaisemiseen saa käyttää Eukleiden postulaatteja P1-P4, Elementan lauseita I.1-I.28, hyperbolista paralleelipostulaattia sekä tietoa kolmion kulmien summasta.

(4) **Hilbertin aksioomat.** Osoita, että jokainen suora rajaa täsmälleen kaksi eri puolitasoa ja näillä puolitasoilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Ohje: Ratkaisun kaikki välivaiheet tulee pohjautua Hilbertin aksiomiin.

Euclid's First Principles

The Initial Explanations and Definitions

1. A *point* is that which has no part.
2. A *line* is lenght without breadht.
3. The extremities of a line are points.
4. A *straight line* is a line which lies evenly with the points on itself.
5. A *surface* is that which has only lenght and breadht.
6. The extremities of a surface are lines.
7. A *plane surface* is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.
8. A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane if the lines meet and do not lie in a straight line.
9. When the lines containing the angle are straight lines, the angle is called a *rectilinear angle*.
10. When a straight line erected on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is called a *right angle*, and the straight line standing on the other is called a *perpendicular* to that on which it stands.
11. An *obtuse angle* is an angle greater than a right angle.
12. An *acute angle* is an angle less than a right angle.
13. A *boundary* is that which is an extremity of anything.
14. A *figure* is that which is cantained by any boundary or boundaries.
15. A *circle* is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one particular poin among those lying within the figure are equal.
16. The particular point (of Definition 15) is called the *center* of the circle.
17. A *diameter* of a circle is any straight line drawn through the center and terminated in both directions by the circumference of the circle. Such a straight line also bisects the circle.
18. A *Semicircle* is the figure contained by a diameter and the circumference cut off by it. The center of the semicircle is the same as that of the circle.
19. *Rectilinear figures* are those which are contained by straight lines, trilateral figures being those caontained by three, *quadrilateral* those cantained by four, and *multilateral* those caontained by more than four straight lines.
20. Of the trilateral figures, an *equilateral triangle* is one which has its three sides equal, an *isosceles triangle* has two of its sides equal, and a *scalene triangle* has its three sides unequal.
21. Furthermore, of the trilateral figures, a *right-angled triangle* is one which has a right angle, an *obtuse-angled triangle* has an obtuse angle, and an *acute-angled triangle* has its three angles acute.
22. Of the quadrilateral figures, a *square* is one which is both equilateral and right-angled; an *oblong* is right-angled but not equilateral; a *rhombus* is equilateral but not right-angled; and a *rhomboid* has its opposite sides and angles equql to one another but is neither equilateral nor right-angled. Quadrilaterals other than these are called *trapezia*.
23. *Parallel* straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

The Postulates

Let the following be postulated:

1. A straight line can be drawn from any point to any point.
2. A finite straight line can be produced continously in a straight line.
3. A circle may be described with any center and distance.
4. All right angles are equal to one another.
5. If a staight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side together less than two straight angles, the two straight line, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are together less than two right angles.

The Axioms or Common Notions

1. Things which are equal to the same thing are also equal to one another.
2. If equals be addedto equals, the wholes are equal.
3. If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
4. Things which coincide with one another are equal to one another.
5. the whole is greater than the part.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
1. kurssikoe 26.2.2007

1. Osoita, että nelikulmio on puolisuunnikas jos ja vain jos sen lävistäjät leikkaavat toisensa niin, että voidaan muodostaa verranto, jonka toisella puolella ovat toisen ja toisella puolella toisen lävistäjän osat.

2. Tarkastellaan tasakylkistä suorakulmaista kolmiota. Määritä niiden pisteiden joukko, joista molemmat kateetit näkyvät $30°$ kulmassa.

3. Konstruoi vain harppia ja viivainta käyttäen annettuun ympyrään sisäänpiirretty viiden yhtenevän neliön muodostama risti.

4. Tarkastellaan ympyrää K ja sen ulkopuolista pistettä P. Etsi vain harppia ja viivainta käyttäen K:n keskipisteen ja P:n yhdysjanalta K:n ulkopuolinen piste A, josta K:lle piirretyn tangentin pituus on yhtä suuri kuin A:n etäisyys P:stä.