Institutionen för matematik och statistik
Geometri
1. mellanförhöret 19.4.2004

1. Använd passare och linjal för att konstruera en rätvinklig triangel i vilken förhållandet mellan kateterna är 2 : 3 och hypotenusans längd överensstämmer med en given sträcka. Använd till exempel homoteti.

2. Visa att höjden mot en sida i en triangel är fjärde proportionalen till diametern för den omskrivna cirkeln och triangelns två övriga sidor.

3. Visa att alla hyperbler $y = \dfrac{a}{x}$, $a > 0$, är sinsemellan homotetiska (med positivt homotetiförhållande). Är de sinsemellan motsatt homotetiska (med negativt homotetiförhållande)?

4. Antag att $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är an avbildning som bibehåller avstånden, det vill säga

$$(*) \qquad |f(P) - f(Q)| = |P - Q| \qquad \text{för alla punkter } P, Q \in \mathbb{R}^2.$$

Vi vill bevisa att f är en affin avbildning, och således en kongruensavbildning i den mening soms gavs på föreläsningarna. Vi noterar först att vi genom att sammansätta f först med en lämplig translation, sedan med en lämplig rotation kring origo och slutligen vid behov med en spegling i x-axeln kan anta att $f(0,0) = (0,0)$, $f(1,0) = (1,0)$ och $f(0,1) = (b,d)$ för $b, d \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$. Visa nu att f är den identiska funktionen och därmed affin. Ledning: Det kan vara nyttigt att undersöka villkoret $(*)$ för punkten $P = (x,y)$ och lämpliga punkter Q.

Institutionen för matematik och statistik
Geometri
1. mellanförhöret 29.3.2004

1. Betrakta två linjer som skär varandra och en punkt A på en av dem så att A inte är skärningspunkten. Konstruera en cirkel med passare och linjal så att den tangerar de båda linjerna och så att den ena tangeringspunkten är A.

2. Antag att en vinkels spets faller innanför en cirkel. Förläng vinkelbenen så att två av cirkelbågarna begränsas av dem. Visa att vinkelns gradtal är medeltalet av gradtalen för de bågar som står emot vinkeln och dess vertikalvinkel.

3. Antag att ABC är en triangel och P en punkt i planet. Låt x, y och z beteckna avstånder från P till hörnen A, B och C. Sidorna som står emot hörnen A, B och C har längderna a, b respektive c. Den omskrivna cirkeln har radien R. Beteckna normalernas skärningspunkter från P mot sidorna BC, CA och AB med A', B' respektive C'. Beteckna sidlängderna i triangeln $A'B'C'$ med a', b' och c', där a' är längden för sidan som står mot hörnet A' osv. Visa likheterna

$$a' = \frac{ax}{2R}, \quad b' = \frac{by}{2R} \quad \text{och} \quad c' = \frac{cz}{2R}.$$

4. Antag att AB och $A'B'$ är sträckor i planet $\mathbb{R}^2$ och att $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $A' = (1,0)$ samt $B' = (1,3)$. Bestäm alla sådana likformighetsavbildningar i planet som avbildar sträckan AB på sträckan $A'B'$ så att $A \mapsto A'$ och $B \mapsto B'$ uppfylls. Vilken mängd avbildas då cirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$ på?

(**Huom.** Tämän viikon harjoitustehtävässä 10:6 tulee lukea "neljäkkääksi", ei "neliöksi".)