Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
2. välikoe 19.5.2004

1. Kuinka pitkä on ellipsin $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ se säde, jonka eksentrinen anomalia on $30°$?

2. Mitä käyrää esittää yhtälö $x^2 + y^2 + 14xy = 24$? Mitkä ovat käyrän pääakselit? Esitä käyrän yhtälö pääakselikoordinaatistossa. Piirrä käyrän kuva xy-koordinaatistossa.

3. Olkoon annettuna suora s ja sen ulkopuolelta kaksi pistettä A ja B. Etsi suoralta s ne pisteet P, joissa suhde $AP : PB$ saavuttaa pienimmän tai vastaavasti suurimman arvonsa. *Ohje.* Tarkastele sitä ympyrää, joka kulkee pisteiden A ja B kautta ja jonka keskipiste on suoralla s.

4. Tarkastellaan sitä Poincarén mallia epäeuklidiselle eli hyperboliselle geometrialle, jossa tasona on kiekko $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
(a) Osoita, että ympyrästä $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ kiekkoon Π jäävä osa ℓ on tämän mallin suora.
(b) Olkoon $P = (0, -1/2)$ piste tässä mallissa, jolloin siis P on ℓ:n ulkopuolella. Etsi sellaiset kaksi mallin eri suoraa ℓ_1 ja ℓ_2, jotka kulkevat P:n kautta ja ovat mallin mielessä yhdensuuntaiset ℓ:n kanssa.
(c) Voidaanko ℓ_1 ja ℓ_2 valita niin, että ne ovat lisäksi mallin mielessä kohtisuorat keskenään?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
2. välikoe (korvaava)
17.5.2005

(1) Määritä ellipsin $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ polttopiste, johtosuora ja eksentrisyys.

(2) Määritä sen affiinin kuvauksen yhtälö, joka kuvaa pisteet $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$ pisteiksi $(3,1)$, $(2,0)$ ja $(1,1)$.

(3) Osoita, että jokainen ellipsi on affiinisti yhtenevä ellipsin $x^2 + y^2 = 1$ kanssa.
Vihje: Käyttämällä Eukliidisia kuvauksia voit olettaa, että ellipsi on standardimuodossa.

(4) Osoita, että affiini kuvaus säilyttää janan osien suhteen.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
2. välikoe
18.5.2005

(1) Määritä niiden ellipsien yhtälöt, joiden polttopiste on $(0,0)$ ja johtosuora on $x = 2$. Kulkeeko näistä ellipseistä mikään pisteen $(1,0)$ kautta?

(2) Määritä sen affiinin kuvauksen yhtälö, joka kuvaa pisteet $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$ pisteiksi $(1,1)$, $(2,0)$ ja $(0,0)$.

(3) Osoita, että jokainen paraabeli on affiinisti yhtenevä paraabelin $x = y^2$ kanssa.
Vihje: Käyttämällä Eukliidisia kuvauksia voit olettaa, että paraabeli on standardimuodossa.

(4) Oletamme, että ellipsi E on kolmion $\triangle ABC$ sisällä ja koskettaa kolmion sivuja AB, BC ja CA pisteissä R, P ja Q. Osoita, että
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$
Leikaavatko suorat AP, BQ ja CR yhdessä pisteessä?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Geometria
2. kurssikoe 2.5.2007

1. Osoita, että hyperbelit

$$H_1\colon\ x^2 - 4y^2 = 1 \quad \text{ja} \quad H_2\colon\ \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

ovat yhdenmuotoiset, konstruoimalla origokeskinen homotetia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka kuvaa hyperbelin H_1 hyperbeliksi H_2. Ovatko hyperbelit H_1 ja H_2 yhtenevät?

2. Olkoon P ellipsin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

($a > b$) piste, ja olkoon t pisteen P eksentrinen anomalia. Piirretään pisteen P kautta suora s, jonka kulmakerroin on $k = -\tan t$. Olkoot Q ja R suoran s leikkauspisteet ellipsin iso- ja pikkuakseleiden tai näiden jatkeiden kanssa. Määritä janojen PQ ja PR pituudet.

3. Etsi käyrän

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32 = 0$$

pääakseliesitys ja määritä tätä kautta käyrän laatu, sekä määritä pääakselit. Piirrä käyrä.

4. Olkoon k ympyrä ja ABC tasasivuinen kolmio, jonka sivu BC on ympyrän k eräs halkaisija. Piirrä vain harppia ja viivainta käyttäen kolmion ABC peilikuva ympyrän k suhteen.