Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
9.8.2007

1. Mikä on funktion

$$\frac{1}{1+z^2}$$

Laurent-kehitelmä alueessa $0 < |z-i| < 2$.

2. Määrää Rouché'n lausetta käyttämällä funktion

$$f(z) = z^3 + 2z^2 + 10z + 3$$

nollakohtien lukumäärä kiekossa $|z| < 1$.

3. Osoita että funktio $u : C \to \mathbf{R}$ jolle

$$u(z) = 0 \text{ kun } |z| \leq 1$$

ja

$$u(z) = \log|z| \text{ kun } |z| > 1$$

on subharmoninen.

4. (Teoria). Olkoot U ja V alueita siten että $U \subset V$. Olkoon z_0 U:n piste ja g_U Greenin funktio U:ssa napana z_0 ja g_V Greenin funktio V:ssä napana myös z_0. Osoita, että $g_U \leq g_V$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
18.12.2007

1. Mitkä ovat funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$$

navat ja mikä on funktion residy näissä pisteissä? Laske tämän avulla integraali

$$\int_\gamma f(z)dz$$

arvo kun $\gamma(t) = 2i + re^{2\pi it}$ jossa a) $r = 1/2$, b) $r = 3/2$ ja c) $r = 5/2$?

2. (Teoria). Olkoot u ja v subharmonisia alueessa U. Osoita että myös funktio $\max(u, v)$ on subharmoninen alueessa U.

3. Etsi Greenin funktio alueessa $U = \mathbf{C} \setminus [0, \infty[$ napana piste -16.

4. Olkoon $Q = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$ ja $\overline{Q}$ joukon Q sulkeuma kompleksitasossa $\mathbf{C}$. Olkoon $f : \overline{Q} \to \mathbf{C}$ on jatkuva funktio, joka on analyyttinen Q:ssa. Oletetaan, että $f(z)$ on reaalinen jos z on reaalinen ja $f(z)$ on puhtaasti imaginäärinen jos z on puhtaasti imaginäärinen. Osoita, että f voidaan jatkaa analyyttiseksi funktioksi koko kompleksitasoon.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
20.5.2008

1. Olkoon z_0 funktion f oleellinen erikoispiste. Oletetaan että on olemassa $a \in \mathbf{C}$ ja z_0:n ympäristö W siten, että f on analyyttinen $W \setminus \{z_0\}$:ssa ja $f(z) \neq a$ kun $z \in W \setminus \{z_0\}$. Osoita että z_0 on myös funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

oleellinen erikoispiste.

2. Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

käyttäen residylaskua.

3. (Teoria) Olkoon u ja v alueesa V subharmonisia funktioita. Osoita, että $w = \max(u, v)$ on subharmoninen V:ssä.

4. Olkoon $V = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$. Mikä on V:n Greenin funktio napana 1?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
12.6.2008

1. Mikä on funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)}$$

Laurent-kehitelmä alueessa $1 < |z| < 2$?

2. Määrää Rouché'n lauseen perusteella funktion $f(z) = 5z^4+z^3+z^2+z+1$ nollakohtien lukumäärä (kertaluku huomioiden) kiekossa $|z| < 1$.

3. Olkoon u harmoninen alueessa U ja $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ kiekko jolle $\overline{D} \subset U$. Osoita

$$u(z_0) = \int_D u(x+iy)dxdx.$$

4. (Teoria) Olkoon V kompleksitason rajoitettu osa-alue josta tiedetään että V:ssä Dirichlet'n ongelma jatkuvin reuna-arvoin on aina ratkaistavissa. Osoita että, jos $a \in V$, niin on olemassa V:n Greenin funktio napana a.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
14.8.2008

1. Laske residylaskulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

2. Olkoon f analyyttinen ja rajoitettu alueessa $0 < |z| < \infty$. Osoita, että f on vakio.

3. Olkoon f analyyttinen alueessa V. Osoita, että $|f|$ on subharmoninen V:ssä. *Ohje.* Lähde analyyttisten funktioiden keskiarvo-ominaisuudesta.

4. Olkoon $V = \{z \in C : -1 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$. Mikä on V:n Greenin funktio napana 0?

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
22.1.2009

1. Mikä on integraalin

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$$

arvo kun $\gamma(t) = \pi/2 + 2e^{i2\pi t}$, $t \in [0,1]$. Pidetään tunnetuna että sinin nollakohdat kompleksitasossa ovat muotoa $n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Mikä on funktion $f(z) = 1/(z^2 + 2z - 3)$ Laurent-kehitelmä alueessa $1 < |z| < 3$?

3. Olkoon $u(z) = \log|z|$ kun $|z| \geq 1$ ja $u(z) = 0$ kun $|z| \leq 1$. Osoita että u on subharmoninen funktio.

4. Olkoon U yhdesti yhtenäinen alue joka sisältää origon. Olkoon g Greenin funktio U:ssa napana origo. Käytä Greenin funktion määritelmää osoittamaan, että on olemassa harmoninen funktio v siten että funktio $\phi(z) = \log|z| + g + iv$ on analyyttinen $U \setminus \{0\}$:ssa ja voidaan jatkaa origoon siten että saadaan U:ssa analyyttinen funktio. Osoita että funktio

$$f(z) = e^{-\phi(z)+\log z}$$

määrittelee funktion jonka arvo pisteessä $z \in U \setminus \{0\}$ ei riipu valitusta logaritmin haarasta ja joka on analyyttinen $U \setminus \{0\}$:ssa ja voidaan jatkaa analyyttisenä funktiona origoon jossa sillä on 0-kohta. Osoita että $|f(z)| < 1$ kaikille $z \in U$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
19.5.2009

1. Laske residylaskulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

2. Osoita että origo on funktion $e^{z^2}e^{1/z}$ oleellinen erikoispiste.

3. Olkoot u ja v subharmonisia alueessa U. Osoita, että funktio $\max(u,v)$ on subharmoninen alueessa U.

4. Olkoon U ylempi puolitaso $\operatorname{Im} z > 0$. Mikä on U:n Greenin funktio napana piste $z_0 = i$?