Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
20.4.2004

1. Määrää Rouché'n lausetta käyttämällä funktion

$$f(z) = z^3 + 2z^2 + 10z + 3$$

nollakohtien lukumäärä kiekossa $|z| < 1$.

2. Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}.$$

3. Olkoot u_1 ja u_2 subharmonisia alueessa U. Osoita, että

$$u(z) = \max(u_1(z), u_2(z))$$

on myös subharmoninen U:ssa.

4. Olkoon $U = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$. Etsi Greemin funktio alueessa U napana piste $z_0 = 1 + i$. (Napa on se piste, jossa Greenin funktiolla on logaritminen singulariteetti).

Funktioteoria II
25.5.2004

1. Mikä on funktion

$$\frac{1}{1+z^2}$$

Laurent-kehitelmä alueessa $0 < |z-i| < 2$?

2. Olkoon u harmoninen suljetun yksikkökiekon jossain ympäristössä Oletetaan, että $|u(z)| \leq M$. Osoita Poissonin kaavan avulla, että

$$|u(z) - u(0)| \leq \frac{4rM}{1-r^2}$$

jos $|z| = r < 1$.

3. Olkoon $U = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$. Mikä on U:n Greenin funktio napana $z_0 = 1$?

4. Olkoon $Q = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$ ja $\overline{Q}$ joukon Q sulkeuma $\mathbf{C}$:ssä. Olkoon $f : \overline{Q} \to \mathbf{C}$ jatkuva funktio joka on analyyttinen Q:ssa. Oletetaan, että $f(z)$ on reaalinen jos z on reaalinen ja että $f(z)$ on puhtaasti imaginäärinen jos z on puhtaasti imaginäärinen. Osoita, että f voidaan jatkaa analyyttiseksi funktioksi koko kompleksitasoon.

In English:

1. What is the Laurent-development of

$$\frac{1}{1+z^2}$$

in the domain $0 < |z-i| < 2$?

2. Let u be harmonic in a neighborhood of the closed unit disk. Suppose that $|u(z)| \leq M$. Show using the Poisson formula that

$$|u(z) - u(0)| \leq \frac{4rM}{1-r^2}$$

if $|z| = r < 1$.

3. Let $U = \mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$. What is the Green's function of U with pole at $z_0 = 1$?

4. Let $Q = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$ and let $\overline{Q}$ be the closure of Q in $\mathbf{C}$. Let $f : \overline{Q} \to \mathbf{C}$ be continuous so that f is analytic in Q. Assume that $f(z)$ is real if z is real and that $f(z)$ is purely imaginary if z is purely imaginary. Show that f can be extended to an analytic function of the whole complex plane.

Funktioteoria II
18.6.2004

1. Olkoon $f(z) = z^2 e^{1/(z-1)}$. Mitkä ovat f:n erikoispisteet? Ovatko ne napoja vai oleellisia erkoispisteitä? Mikä on f:n residy näissä pisteissä?

2. Olkoon u harmoninen alueessa U. Osoita, että $g = u_x - iu_y$ on analyyttinen alueessa U. Osoita, että jos u:lla on liittofunktio v alueessa U ja $f = u + iv$, niin $f' = g$.

3. Olkoot u_1 ja u_2 subharmonisia alueessa U. Osoita, että $v = \max(u_1, u_2)$ on subharmoninen alueessa U.

4. Olkoon U kompleksitason alue siten, että $\sqrt{z}$:llä on haara $f(z)$ U:ssa, ts. $e^{f(z)} = z$. Osoita, että on olemassa jokin kiekko $\{|z-a| < r\}$ joka sisältyy f:n kuvan fU komplementtiin.

Funktioteoria II
10.8.2004

1. Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

2. Olkoon $f(z) = 5z^5 + z^4 + 1$. Osoita Rouché'n lauseen avulla, että f:llä on yksikkökiekossa $|z| < 1$ tasan viisi 0-kohtaa kertaluku huomioiden.

3. Määritellään funktio $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ siten, että $u(z) = \log|z|$ jos $|z| \geq 1$ ja $u(z) = 0$ muulloin. Osoita, että u on subharmoninen.

4. Olkoon U alue ja $z_0 \in U$. Olkoon V toinen alue siten, että $V \supset U$. Olkoon g_1 U:n Greenin funktio napana z_0 ja g_2 V:n Greenin funktio napana myös z_0. Osoita, että $g_1 \leq g_2$.

Funktioteoria II
7.10.2004

1. Olkoon f analyyttinen origon ulkopuolella. Osoita, että jos $|f(z)|^2 \leq 10|z|^5$ kun $|z| \neq 0$, niin f:llä on enintäin kertalukua 2 oleva napa origossa.

2. Laske residylaskulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+4x^2)}.$$

3. Olkoot u ja v subharmonisia koko tasossa. Osoita, että myös $\max(u, v)$ on subharmoninen.

4. Etsi Greenin funktio kiekossa $|z| < 10$ napana piste $z = 1$.

Funktioteoria II
16.12.2004

1. Laske residylaskun avulla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)}.$$

2. Kehitä Laurent-sarjaksi alueessa $1 < |z| < 2$ funktio

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)}.$$

3. Mikä on alueen $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$ Greenin funktio napana piste $z_0 = 2$.

4. Olkoon u alueessa U harmoninen. Oletetaan, että u saavuttaa maksiminsa alueessa U: On olemassa piste $z_0 \in U$ siten, että $u(z_0) \geq u(z)$ kaikille $z \in U$. Osoita, että u on vakio.

Funktioteoria II
20.1.2005

1. Olkoon f alueessa $0 < |z| < R$ analyyttinen funktio, joka toteuttaa ehdon

$$|f(z)| \leq M|z|^n.$$

Osoitettava, että f:llä on origossa enintäin n-kertainen napa.

2. Olkoon $\gamma : [0,2] \to \mathbf{C}$ kompleksiktason polku siten, että $\gamma(t) = (1+t)e^{4\pi i t}$ kun $t \in [0,1]$ ja $\gamma(t) = 3 - t$ kun $t \in [0,1]$. Osoita γ:n kierrosluku pisteessä z on 2 kun $|z| < 1$. Laske tämän avulla

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^4} dz.$$

3. Osoita, että funktio $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ jolle

$$u(z) = 0 \text{ kun } |z| \leq 1$$

ja

$$u(z) = \log|z| \text{ kun } |z| > 1$$

on subharmoninen.

4. Muodosta Greenin funktio ylemmässä puolitasossa napana piste $z = i$.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
Loppukoe 3.4. 2006

1. Kehitä funktio

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+3)}$$

Laurent-sarjaksi renkaissa $\{z : 1 < |z| < 3\}$ ja $\{z : |z| > 3\}$.

2. Näytä Rouche'n lauseen avulla ettää yhtälön

$$z^7 - 9z^3 + 11 = 0$$

kaikki juuret toteuttavat ehdon $1 < |z| < 2$.

3. Jos $0 < p < 1$, määrää integraali

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^2}\,dx$$

4. Olkoon $f : \mathbb{D} \to \Omega$ univalentti (konforminen) kuvaus yksikkökiekolta $\mathbb{D}$ alueelle Ω. Oletamme, että $f(0) = 0$. Osoita, että silloin f toteuttaa ehdon $f(z) = -f(-z)$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$, jos ja vain jos Ω on symmetrinen origon suhteen.

5. Olkoot α ja β kompleksilukuja, joille $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$. Näytä että silloin funktiolla

$$z \mapsto z^\alpha (1-z)^\beta$$

on analyyttinen haara joukossa $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0,1]$.

Funktioteoria II (Gullyarstin luennot)
9. 8. 2006

1. Määritä funktioiden

$$\frac{z^2}{\sin z} \quad \text{ja} \quad \frac{z^4}{1+z^4}$$

singulariteettien tyypit $\mathbb{C}$:ssä.

2. Määritä funktion $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ residy pisteessä $z = \pi$.

3. Olkoon $u : G \to \mathbb{R}$ harmoninen ja $f : D \to G$ analyyttinen funktio. Näytä, että $u \circ f : D \to \mathbb{R}$ on harmoninen.

4. Miten määritellään subharmoninen funktio $v : G \to \mathbb{R}$, G avoin $\mathbb{C}$:ssä? Näytä, että harmoninen funktio on subharmoninen.

5. Osoita: Olkoon G symmetrinen alue reaaliakselin suhteen ja $f : G^+ \to \mathbb{C}$, $G^+ = H^+ \cap G$, analyyttinen ja vielä jatkettavissa jatkuvaksi funktioksi G:n ja reaaliakselin leikkaukseen L. Jos $\operatorname{Im} f(z) = 0$, kun $z \in L$, niin tällöin funktiolla f on analyyttinen jatko G:hen, jolle tietenkin

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in G.$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktioteoria II
6.3.2007

1. Laske intgeraali

$$\int_\gamma \frac{dz}{e^z - 1}$$

jossa $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, ja jossa r on positiivinen reaaliluku joka ei ole 2π:n monikerta.

2. Muotoile ja todista harmonisten funktioiden peiliperiaate.

3. Mikä on Greenin funktio joukossa $U = \mathbf{C} \setminus [0, \infty[$ napana piste -1?

4. Olkoon U yhdesti yhtenäinen alue siten että $0 \notin U$. Osoita, että neliöjuurella $\sqrt{z}$ on haara U:ssa ja että sillä on seuraava ominaisuus. Jos $w = f(z)$ jollekin $z \in U$, niin $-w \notin fU$. Osoita tähän perustuen että fU:n komplementilla on sisäpisteitä. Tässä voi olettaa tunnetuksi, että logaritmifunktiolla on haara U:ssa.