Matematiikan ja tilastotieteeen laitos
Funktioteoria I
9.8.2007

1. Olkoon funktio f koko tasossa analyyttinen. Osoita että myös funktio $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ on myös koko tasossa analyyttinen.

2. Olkoon U alue joka saadaan poistamalla kompleksitasosta positiivinen imaginääriakseli, ts. joukko $\{ix : x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$. Anna jokin logaritmin haara U:ssa. Olkoon f tällainen haara. Osoita, käyttäen käänteisfunktion derivaattaa koskevaa lausetta että $zf(z) - z$ on f:n integraalifunktio alueessa U.

3. Etsi Möbiuskuvaus f joka pitää pisteet 1 ja -1 paikallaan ja kuvaan origon pisteeksi $a \in \overline{\mathbf{C}}$. Millä a:n arvoilla f kuvaa ylemmän puolitason itselleen, ts. $fU = U$ kun $U = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$?

4. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z} dz}{z+i}$$

kun $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$

LOPPUKOE 19.12.2007

FUNKTIOTEORIA I

1.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(x+iy) = (x^2 - y^2) + icxy\,,$$

missä $c \in \mathbb{R}$ on reaalinen parametri. Määrää kaikki parametrin c arvot, joilla f on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z \neq 0$.

1.2. **Tehtävä.** Anna jokin logaritmin haara joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ja osoita, että se on analyyttinen ja sen derivaatta on kuvaus $z \mapsto 1/z$.

1.3. **Tehtävä.** Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Määrää integraali

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} \frac{\exp(z)}{z(z-4)}\, dz$$

1.4. **Tehtävä.** (a) Olkoon funktio f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Olkoon funktiolla f ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä z_0. Osoita, että

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)\,.$$

(b) Olkoon $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3}$, kun $z \neq 0$. Määrää perustellen erikoispisteen laatu pisteessä $z = 0$.

(c) Anna esimerkki funktiosta, jolla on oleellinen erikoispiste pisteessä $z_0 = 4$.

1.5. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)\, dx}{x^2 + 1}\,.$$

Hyvää joululomaa!

1. LOPPUKOE
FUNKTIOTEORIA I
4.3.2008

1.1. **Tehtävä.** Määrää
$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 .$$

1.2. **Tehtävä.** Osoita, että funktio
$$z \mapsto \exp \overline{z}$$
ei ole kompleksisesti derivoituva missään kompleksitason pisteessä.

1.3. **Tehtävä.** Olkoon polku $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ siten,että $\gamma(t) = 3\exp it$. Osoita, että
$$\left|\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z-1}\,dz\right| \le \frac{3\pi}{2}e^3 .$$

1.4. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen koko kompleksitasossa. Olkoon M positiivinen reaaliluku siten, että $|f(z)| > M$ kaikilla kompleksiluvuilla z. Osoita, että funktio f on vakio.

1.5. **Tehtävä.** Määrää
$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2(z-2)}\,dz .$$

1. LOPPUKOE 13.05.2008
FUNKTIOTEORIA I

1.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$$f(z) = \frac{z}{1+|z|}.$$
Milloin funktio f on kompleksisesti derivoituva?

1.2. **Tehtävä.** Olkoot $f : z \mapsto \exp(iz^2)$ ja $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = r\exp(it)$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Osoita, että
$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \le \frac{\pi(1-e^{-r^2})}{4r}.$$

1.3. **Tehtävä.** Määrää integraali
$$\int_{|z|=3} \frac{\exp(z)}{z(z-2)}\,dz.$$

1.4. **Tehtävä.** (a) Määrää luvun i^π kaikki arvot.

(b) Todista seuraava: Koko kompleksitasossa analyyttinen funktio, joka on rajoitettu, on vakiofunktio.

1.5. **Tehtävä.** Määrää integraali
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\sin x}.$$

1. Loppukoe 12.06.2008
funktioteoria I

1.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z}{1 + |z|}\,.$$

Määrää perustellen, milloin funktio f on kompleksisesti derivoituva?

1.2. **Tehtävä.** Olkoon polku $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ siten, että $\gamma(t) = r\exp(it)$, missä $r > 3$. Osoita, että

$$\left| \int_\gamma \frac{\exp(3iz)}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}\, dz \right| \le \frac{\pi r}{(r^2 - 4)(r^2 - 9)}\,.$$

1.3. **Tehtävä.** (a) Määrää luvun i^i kaikki arvot.

(b) Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ kaikilla $t \in [0, 2\pi]$. Määrää integraali

$$\int_\gamma \frac{dz}{1 - z^2}\,.$$

1.4. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Todista seuraava: jos on olemassa reaalinen vakio M ja ei-negatiivinen kokonaisluku k siten, että

$$|f(z)| \le M(1 + |z|^k)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin funktio f on korkeintaan astetta k oleva polynomi.

1.5. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx\,.$$

1. LOPPUKOE
FUNKTIOTEORIA I
14.08.2008

1.1. **Tehtävä.** Olkoon funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto z \operatorname{Re} z$. Missä kompleksitason pisteissä funktio f on kompleksisesti derivoituva? Onko funktio f analyyttinen?

1.2. **Tehtävä.** Olkoon $r > 0$. Olkoon polku $\gamma : [0, \pi/4] \to \mathbb{C}$ siten,että $\gamma(t) = r \exp(it)$. Osoita, että

$$\left| \int_\gamma \exp(iz^2)\, dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}\,.$$

1.3. **Tehtävä.** (a) Määrää luvun i^i kaikki arvot.
(b) Määrää integraali

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2(z-2)}\, dz\,.$$

1.4. **Tehtävä.** Todista seuraava: Koko kompleksitasossa analyyttinen funktio, joka on rajoitettu, on vakiofunktio.

1.5. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx\,.$$

1. LOPPUKOE

FUNKTIOTEORIA I

21.10.2008

1.1. **Tehtävä.** Yhtälön

$$5z^4 - 11z^3 + 16z^2 - 11z + 5 = 0$$

jokaisen neljän ratkaisun moduli on 1. Etsi juuret.

1.2. **Tehtävä.** Olkoon $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ kompleksiarvoinen funktio.

(a) Oletetaan, että funktio f on analyyttinen koko kiekossa $D(0,1)$. Todista, että funktion f Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa jokaisessa kiekon $D(0,1)$ pisteessä.

(b) Oletetaan, että Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa pisteessä $z_0 \in D(0,1)$. Osoita esimerkillä, että funktio f ei ole välttämättä kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0.

1.3. **Tehtävä.** Osoita, että $z \mapsto \exp(b \log z)$ on yksiarvoinen funktio, jos ja vain jos b on kokonaisluku. Mitä voit sanoa tilanteesta, jos b on rationaalinen?

1.4. **Tehtävä.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Todista seuraava: jos on olemassa reaalinen vakio M ja ei-negatiivinen kokonaisluku k siten, että

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^k)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin funktio f on korkeintaan astetta k oleva polynomi.

1.5. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

1. Koe 17.12.2008
funktioteoria I

1.1. **Tehtävä.** Olkoon $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio.

a) Oletetaan, että funktio f on analyyttinen. Osoita, että funktion f Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa jokaisessa kiekon $D(0,1)$ pisteessä.

b) Oletetaan, että funktion f Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa pisteessä $z_0 \in D(0,1)$. Osoita esimerkillä, että funktio f ei ole välttämättä kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0.

1.2. **Tehtävä.** Etsi kaikki kompleksiset ratkaisut yhtälölle $\cos z = 5/4$.

1.3. **Tehtävä.** (a) Määrää integraali

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{4z - \pi}\, dz\,,$$

missä $\gamma(t) = 3\exp(-it)$, $t \in [0, 4\pi]$.
(b) Olkoon $f(z) = z^7 \cos \frac{1}{z}$, kun $z \neq 0$. Määrää perustellen erikoispisteen laatu pisteessä $z = 0$.
(c) Anna esimerkki funktiosta, jolla on oleellinen erikoispiste pisteessä $z_0 = 1$.

1.4. **Tehtävä.** Etsi funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Laurent-sarja pisteen $z_0 = i$ ympärillä punkteeratussa kiekossa $D(i, 2)\backslash\{i\}$.

1.5. **Tehtävä.** Olkoon

$$f(z) = \frac{z-1}{z-3}\,.$$

Määrää origokeskisen yksikkökiekon kuva.

1. LOPPUKOE
FUNKTIOTEORIA I
03.03.2009

1.1. **Tehtävä.** Olkoon f kompleksitason kiekossa $D(x_0, 5)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, määritelty analyyttinen funktio. Osoita, että myös funktio g,

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})},$$

on analyyttinen samassa kiekossa.

1.2. **Tehtävä.** Olkoon $r > 0$. Olkoon polku $\gamma : [0, \pi/4] \to \mathbb{C}$ siten,että $\gamma(t) = r \exp it$. Osoita, että

$$\left| \int_\gamma \exp(iz^2)\, dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}.$$

1.3. **Tehtävä.** (a) Määrää luvun i^i kaikki arvot.
(b) Määrää integraali

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2(z-2)}\, dz.$$

1.4. **Tehtävä.** Etsi funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Laurent-sarja pisteen $z_0 = i$ ympärillä punkteeratussa kiekossa $D(i, 2) \setminus \{i\}$.

1.5. **Tehtävä.** Määrää origokeskisen yksikkökiekon kuva kuvauksissa

$$f(z) = z + i \text{ ja } f(z) = \frac{iz + i}{1 - z}.$$

Etsi Möbius-kuvaus, joka kuvaa kiekon $D(i, 1)$ vasemmalle puolitasolle $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ siten, että origo kuvautuu origoksi.