

2. KURSSIKOE
FUNKTIOTEORIA I
13.12.2007

2.1. **Tehtävä.** (a) Olkoon $\gamma : [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{C}$ polku siten, että $\gamma(t) = 2 \exp(it)$ kaikilla $t \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Osoita, että

$$\left| \int_{\gamma} \frac{1}{z^3 + 1} dz \right| \leq \frac{2\pi}{3\sqrt{65}}.$$

(b) Todista Liouvilien lause.

2.2. **Tehtävä.** Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Määrää integraali

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^2(z-2)} dz.$$

(b) Määrää integraali

$$\int_{\bar{\gamma}} \frac{\exp(z)}{z(z-4)} dz.$$

2.3. **Tehtävä.** (a) Olkoon funktio f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Olkoon funktiolla f ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä z_0 . Osoita, että

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0).$$

(b) Olkoon $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^5}$, kun $z \neq 0$. Määrää perustellen crikoispisteen laatu pisteessä $z = 0$.

(c) Anna esimerkki funktiosta, jolla on oleellinen crikoispiste pisteessä $z_0 = 1$.

2.4. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3 \sin(t)} dz.$$

Hyvää joululomaa!

2. KURSSIKOE
FUNKTIOTEORIA I
11.12.2008

2.1. **Tehtävä.** (a) Olkoon $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen. Jos $|f'(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin osoita, että funktio f on korkeintaan toisen asteen polynomi.

(b) Olkoon $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ analyyttinen. Oletetaan, että funktiolla f on myös käänteiskuvaus, joka on analyyttinen kiekossa $D(0, 1)$. Jos $f(0) = 0$, niin osoita, että funktio f on tason kierto.

2.2. **Tehtävä.** (a) Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 4 \exp(it)$. Määrää integraali

$$\int_{\gamma} \frac{\exp(z^2)}{(2z-1)^2} dz.$$

(b) Olkoon funktio f analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Olkoon funktiolla f toisen kertaluvun napa pisteessä z_0 . Osoita, että

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \left(f(z)(z - z_0)^2 \right).$$

2.3. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5} + \cos(t)}.$$

2.4. **Tehtävä.** Kuvaa sektori $\{z : -\pi/4 < \arg z < \pi/4\}$ konformisesti yksikkökiekkoon eli rakenna yhdistetty kuvaus konformikuvauksista siten, että yhdistetty konformikuvaus kuvaa sektorin avoimeksi yksikkökiekoksi. Rakenna kuvaus siten, että piste $z = 2$ kuvautuu origoon.